

## Nombres complexes et géométrie

### 1 Interprétation géométrique des nombres complexes

#### Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on peut définir :

L'affixe d'un point  $M(x; y)$  par le nombre complexe  $z_M = x + iy$ .

L'affixe d'un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  par le nombre complexe  $z_{\vec{u}} = x + iy$ .

#### Propriétés

Prouver les résultats suivants :

1. Si  $k \in \mathbb{R}$  alors  $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$ .
2.  $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ .
3.  $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$ .
4. Si  $G = \text{bar}(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$  alors  $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ .

### 2 Application : Droite d'Euler d'un triangle

Le but de cette partie est de démontrer que le centre  $O$  du cercle circonscrit, le centre de gravité  $G$  et l'orthocentre  $H$  d'un triangle  $ABC$  quelconque sont alignés et que  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ .

1. Faire une figure, construire également les points  $I, J$  et  $K$  symétriques respectifs du point  $O$  par rapport aux droites  $(BC), (AC)$  et  $(AB)$ .

Le plan est désormais muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$ .

2. Prouver que  $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ .
3. Prouver que les quadrilatères  $OBIC, OAJC$  et  $OAKB$  sont des losanges donc des parallélogrammes, en déduire que  $z_I = z_B + z_C, z_J = z_A + z_C$  et  $z_K = z_A + z_B$ .
4. On considère le point  $P$  tel que  $z_P = z_A + z_B + z_C$ , prouver que  $\vec{AP} = \vec{OI}, \vec{BP} = \vec{OJ}$  et  $\vec{CP} = \vec{OK}$ . En déduire que  $P = H$ .
5. Prouver que  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ .