

Nombres complexes et géométrie

1 Interprétation géométrique des nombres complexes

Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on peut définir :

L'afixe d'un point $M(x; y)$ par le nombre complexe $z_M = x + iy$.

L'afixe d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par le nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + iy$.

Propriétés

Prouver les résultats suivants :

1. Si $k \in \mathbb{R}$ alors $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$.
2. $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.
3. $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$.
4. Si $G = \text{bar}(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

2 Application : Droite d'Euler d'un triangle

Le but de cette partie est de démontrer que le centre O du cercle circonscrit, le centre de gravité G et l'orthocentre H d'un triangle ABC quelconque sont alignés et que $\vec{OH} = 3\vec{OG}$.

1. Faire une figure, construire également les points I, J et K symétriques respectifs du point O par rapport aux droites $(BC), (AC)$ et (AB) .

Le plan est désormais muni d'un repère orthonormé d'origine O .

2. Prouver que $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
3. Prouver que les quadrilatères $OBIC, OAJC$ et $OAKB$ sont des losanges donc des parallélogrammes, en déduire que $z_I = z_B + z_C, z_J = z_A + z_C$ et $z_K = z_A + z_B$.
4. On considère le point P tel que $z_P = z_A + z_B + z_C$, prouver que $\vec{AP} = \vec{OI}, \vec{BP} = \vec{OJ}$ et $\vec{CP} = \vec{OK}$. En déduire que $P = H$.
5. Prouver que $\vec{OH} = 3\vec{OG}$.