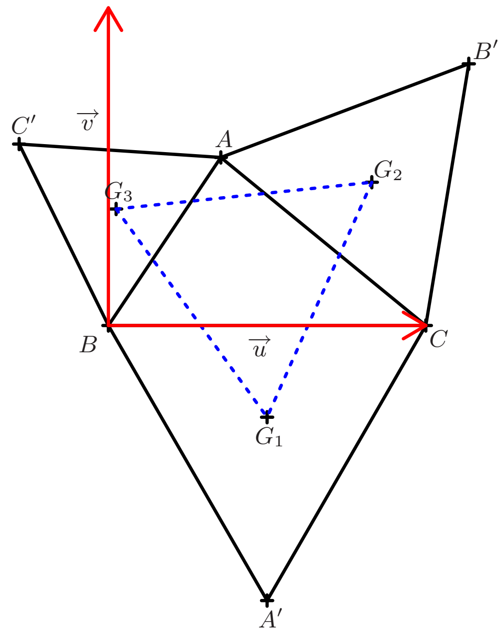
Théorème de Napoléon

On considère un triangle ABC quelconque et on construit extérieurement les triangles équilatéraux $A'BC$, $AB'C$ et ABC'.
On appelle respectivement G_1, G_2 et G_3 les centres de gravité de ces triangles.

Le but de l'activité est de démontrer que le triangle $G_1G_2G_3$ est équilatéral.

On se place désormais dans le repère du plan orthonormé direct $(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



1. Déterminer l'affixe des points B et C.
2. Déterminer l'affixe du point A' sous forme trigonométrique.
3. On pose $z_A = re^{i\theta}$ l'affixe du point A sous forme trigonométrique.
   (a) Que représentent géométriquement les réels r et θ ?
   (b) Déterminer l'affixe du point C' sous forme trigonométrique.
4. Prouver que $z_{\overrightarrow{CB'}} = z_{\overrightarrow{CA}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que $z_{B'} = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} + re^{i(\theta - \frac{\pi}{3})}$.
5. Déterminer les affixes des points G_1, G_2 et G_3.
6. En déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{G_1G_2}$ et $\overrightarrow{G_1G_3}$.
7. Prouver que $z_{\overrightarrow{G_1G_3}} = z_{\overrightarrow{G_1G_2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$.
8. Conclure.