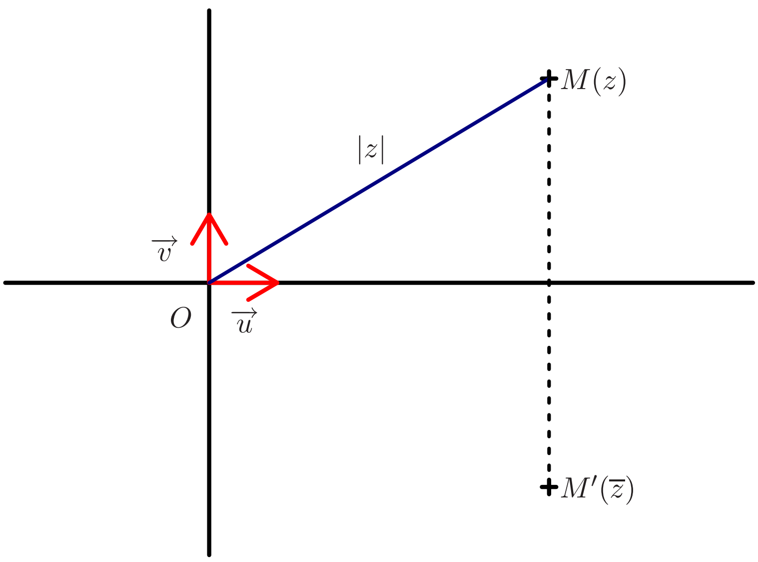
Nombres complexes (deuxième partie)

1 Interprétation géométrique des nombres complexes

Définition 1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on définit :*
- *L'affixe d'un point $M(x; y)$ par le nombre complexe* $z_M = x + iy$.
- *L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par le nombre complexe* $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$.

Le plan est alors appelé *plan complexe*, l'axe des abscisses est appelé *axe des réels* et l'axe des ordonnées *axe des imaginaires purs.*

Propriété 1. *Soit M un point du plan complexe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'affixe z, alors :*
1. $|z| = OM$.
2. $\overline{z}$ *est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.*



Démonstration. au programme. □

Propriété 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points du plan complexe, alors :*
1. *Si* $k \in \mathbb{R}$ *alors* $z_{k\overrightarrow{u}} = kz_{\overrightarrow{u}}$.
2. $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$.
3. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
4. *Si* $G = bar(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$ *alors* $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

Démonstration. au programme. □

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition 2. *Soit θ un nombre réel, on lui associe le nombre complexe* $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$.

Propriété 3. $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$

Démonstration. au programme. □

Par analogie avec la fonction exponentielle, on utilise désormais la *notation d'Euler* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Corollaire 1. *Formule de Moivre*

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad \textit{soit} \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration. au programme. □

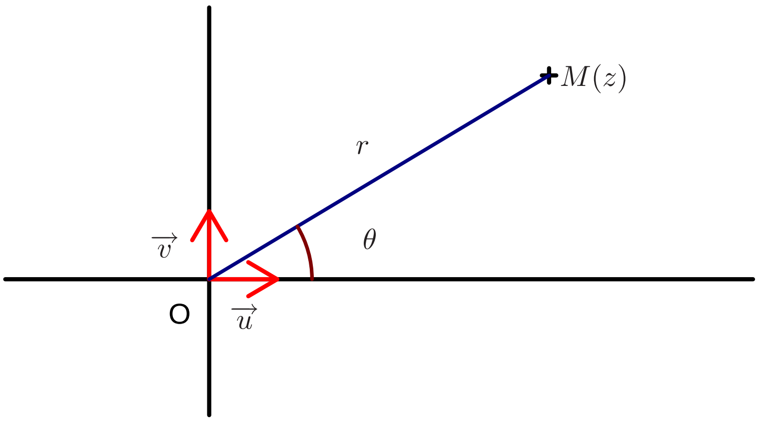
Théorème 1. *Tout nombre complexe $z = x + iy$ non nul peut s'écrire de manière unique sous la* forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ *avec r un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :*

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Le réel θ est appelé argument *du nombre complexe z et noté* $\arg(z)$.

Démonstration. au programme. □

Le couple (r, θ) représente les coordonnées polaires du point M d'affixe z dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:



Propriété 4. *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, alors :*

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
3. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
4. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
5. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.
6. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi] \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. au programme. □

3 Écritures complexes des transformations du plan

Propriété 5. *Soient A et B deux points et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan complexe, alors :*

1. $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$.
2. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{v}}}{z_{\overrightarrow{u}}}\right)$ $[2\pi]$.
3. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \mathcal{R}e\,(z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}}) = \frac{1}{2}\,(z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}} + \overline{z_{\overrightarrow{u}}}z_{\overrightarrow{v}})$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 2. *Un point M du plan complexe d'affixe z appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si il existe un réel θ tel que :*

$$z = z_A + re^{i\theta}$$

Démonstration. au programme. □

Théorème 2. *Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z', alors :*

1. *Le point M' est l'image du point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si :*

$$z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$$

2. *Le point M' est l'image du point M par une homothétie de centre A et de rapport k si et seulement si :*

$$z' = k(z - z_A) + z_A$$

3. *Le point M' est l'image du point M par la rotation de centre A et d'angle α si et seulement si :*

$$z' = e^{i\alpha}(z - z_A) + z_A$$

Démonstration. au programme. □

Exemples. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes (on pourra chercher des points invariants) :*

$$\begin{aligned} z' &= z - 2 + 3i \\ z' &= \overline{z} \\ z' &= iz - 1 + i \\ z' &= 2z - 1 - i \end{aligned}$$