Devoir maison de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points
   - A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$
   - B d'affixe $b + \mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$
   - C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   (a) Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $(O\ ;\ \overrightarrow{v})$.

   (b) Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -\mathrm{i}$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   (a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

   (b) Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$; que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?

   (c) Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   (d) Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   (e) Déterminer la nature du triangle BEF.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}$.

   (a) Calculer les affixes des points A$'$ et B$'$ images des points A et B par f.

   (b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

   (a) Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

   (b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. (a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

   (b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_{\mathrm{J}} = 2$ et $z_{\mathrm{K}} = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

   (c) Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -4 - 3\mathrm{i}$.
   Donner la forme trigonométrique de $(z_{\mathrm{E}} + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
   Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.