

Devoir maison de Mathématiques n°3

Exercice 1

- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points
 - A d'affixe a , $a \in \mathbb{R}$
 - B d'affixe $b + i$, $b \in \mathbb{R}$
 - C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $(O ; \vec{v})$.
 - Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a .
- Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -i$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.
 - Quelle est la nature du triangle ABC ?
 - Calculer le quotient $\frac{d-a}{c-a}$; que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?
 - Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur \vec{AC} .
 - Déterminer la nature du triangle BEF .

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z$$

- Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.
 - Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f .
 - On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
- Soit I le point d'affixe -3 .
 - Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
 - Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
- Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.
 - On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle (\mathcal{C}) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.
 - Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.
Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E .
Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.