

Correction du devoir maison de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. (a) Comme C est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors C a pour affixe :

$$\begin{aligned}e^{i\frac{\pi}{3}}(b+i-a) + a &= \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(b-a+i) + a \\&= \frac{1}{2}(b-a-\sqrt{3}+2a) + \frac{1}{2}i(\sqrt{3}(b-a)+1) \\&= \frac{1}{2}(b+a-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}i(\sqrt{3}(b-a)+1)\end{aligned}$$

Pour que le point C appartienne à l'axe $(O; \vec{v})$, il faut et il suffit que la partie réelle de l'affixe de C soit nulle, donc :

$$\frac{1}{2}(b+a-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow a+b = \sqrt{3}$$

- (b) Dans ce cas, l'affixe du point C est, en fonction de a :

$$\frac{1}{2}i(\sqrt{3}(\sqrt{3}-a-a)+1) = (2-\sqrt{3}a)i$$

2. (a) D'après l'étude précédente, le triangle ABC est équilatéral car $b = \sqrt{3}-a = 0$ et $c = (2-\sqrt{3}a)i = -i$.
(b)

$$\begin{aligned}\frac{d-a}{c-a} &= \frac{2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}} \\&= \frac{2(1-i\sqrt{3})}{-\sqrt{3}-i} \\&= \frac{2(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{3+1} \\&= 2i\end{aligned}$$

Donc

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi le triangle ACD est rectangle en A .

- (c) Comme E est l'image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors son affixe est :

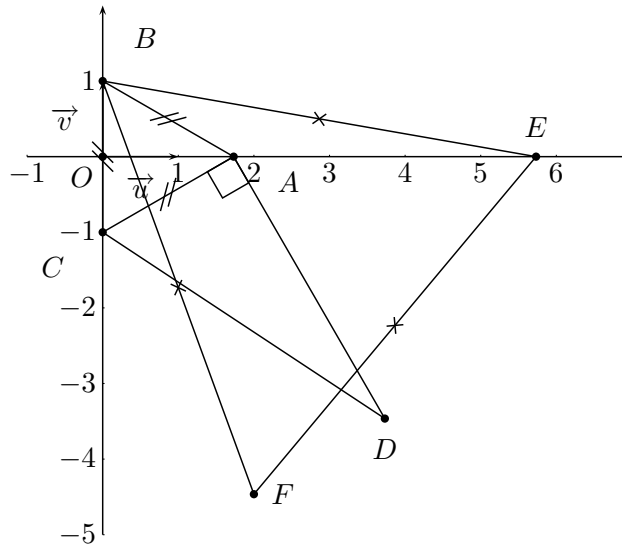
$$\begin{aligned}e &= e^{i\frac{\pi}{3}}(d-a) + a \\&= \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \\&= \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(2-2i\sqrt{3}) + \sqrt{3} \\&= (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) + \sqrt{3} \\&= 1+3+\sqrt{3} = 4+\sqrt{3}\end{aligned}$$

- (d) Comme F est l'image de D dans la translation de vecteur \overrightarrow{AC} , alors son affixe est :

$$f = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + (-i - \sqrt{3}) = 2 - i(1 + 2\sqrt{3})$$

(e) Le triangle BEF est équilatéral, car :

$$\begin{aligned} BE^2 &= |i - (4 + \sqrt{3})|^2 = 1 + (4 + \sqrt{3})^2 = 1 + 16 + 8\sqrt{3} + 3 = 20 + 8\sqrt{3} \\ BF^2 &= |i - (2 - i(1 + 2\sqrt{3}))|^2 = |-2 + 2i(1 + \sqrt{3})|^2 \\ &= 4 + 4(1 + \sqrt{3})^2 = 20 + 8\sqrt{3} \\ EF^2 &= |4 + \sqrt{3} - 2 + i(1 + 2\sqrt{3})|^2 = |2 + \sqrt{3} + i(1 + 2\sqrt{3})|^2 \\ &= (2 + \sqrt{3})^2 + (1 + 2\sqrt{3})^2 = 20 + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$



Exercice 2

- Soit $z_A = 1 - i$; alors $z_{A'} = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = 1 - 1 - 2i - 4 + 4i = -4 + 2i$.
Soit $z_B = 3 + i$; alors $z_{B'} = (3 + i)^2 - 4(3 + i) = 9 - 1 + 6i - 12 - 4i = -4 + 2i = z_{A'}$.
 - Supposons que z_1 et z_2 aient la même image par f , alors :
 $z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \iff z_1^2 - z_2^2 - 4z_1 + 4z_2 = 0 \iff (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \iff$
 $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0 \iff \begin{cases} z_1 - z_2 = 0 \\ z_1 + z_2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 + z_2 = 4 \end{cases}$
 Conclusion : si deux points ont la même image :
 - ou ils sont égaux ;
 - ou ils sont symétriques autour du point d'affixe 2 (car $\frac{z_1 + z_2}{2} = 2$).
- $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[OI]$ et $[MM']$ ont le même milieu soit si $-\frac{3}{2} = \frac{z + z'}{2} \iff -3 = z + z' \iff -3 = z + z^2 - 4z \iff z^2 - 3z + 3 = 0$.
 - $z^2 - 3z + 3 = 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$.
 D'où les deux solutions : $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.
- $(z' + 4) = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$. De cette égalité il découle :
 - en égalant les modules $|z' + 4| = |(z - 2)^2| = |z - 2|^2$,
 - en égalant les arguments $\arg(z' + 4) = \arg[(z - 2)^2] \pmod{2\pi} = 2\arg(z - 2) \pmod{2\pi}$.
 - Si un point M appartient au cercle (C) de centre J et de rayon 2, alors $|z - 2| = 2$; d'après la question précédente son image M' a une affixe z' telle que $|z' + 4| = |z - 2|^2 = 2^2 = 4$: ceci signifie que M' appartient au cercle (C') de centre K et de rayon 4.
 - $z_E = -4 - 3i$. Donc $(z_E + 4) = -4 - 3i + 4 = -3i = 3e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
 D'après la question 3. a. il résulte que $\arg(z - 2) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
 De $(z' + 4) = (z - 2)^2$ il découle que ou $z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $z - 2 = -\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, soit $2 + \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $2 - \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou encore $z_1 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $z_2 = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$.