Correction du devoir maison de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. (a) Comme C est l' image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors C a pour affixe :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b+\mathrm{i}-a)+a &= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(b-a+\mathrm{i})+a \\
&= \frac{1}{2}\left(b-a-\sqrt{3}+2a\right)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{3}(b-a)+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(b+a-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{3}(b-a)+1\right)
\end{aligned}$$

Pour que le point C appartienne à l'axe $(O;\overrightarrow{v})$, il faut et il suffit que la partie réelle de l'affixe de C soit nulle, donc :

$$\frac{1}{2}\left(b+a-\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow a+b=\sqrt{3}$$

(b) Dans ce cas, l'affixe du point C est, en fonction de a :

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{3}(\sqrt{3}-a-a)+1\right)=\left(2-\sqrt{3}a\right)\mathrm{i}$$

2. (a) D'après l'étude précédente, le triangle ABC est équilatéral car $b=\sqrt{3}-a=0$ et $c=\left(2-\sqrt{3}a\right)\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{d-a}{c-a} &= \frac{2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-\mathrm{i}-\sqrt{3}} \\
&= \frac{2(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{-\sqrt{3}-\mathrm{i}} \\
&= \frac{2(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(-\sqrt{3}+\mathrm{i})}{3+1} \\
&= 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right)=arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$$

Ainsi le triangle ACD est rectangle en A.

(c) Comme E est l'image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors son affixe est :

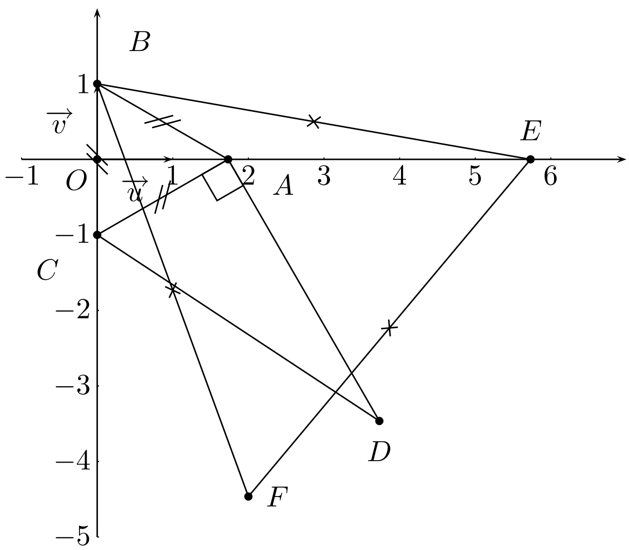
$$\begin{aligned}
e &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(d-a)+a \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+\sqrt{3} \\
&= \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+\sqrt{3} \\
&= 1+3+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(d) Comme F est l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, alors son affixe est :

$$f=2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}+(-\mathrm{i}-\sqrt{3})=2-\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)$$

(e) Le triangle BEF est équilatéral, car :

$$\begin{aligned}
BE^2 &= |\mathrm{i}-(4+\sqrt{3})|^2 = 1+\left(4+\sqrt{3}\right)^2 = 1+16+8\sqrt{3}+3 = 20+8\sqrt{3}\\
BF^2 &= |\mathrm{i}-\left(2-\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)\right)|^2 = |-2+2\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)|^2\\
&= 4+4\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 20+8\sqrt{3}\\
EF^2 &= |4+\sqrt{3}-2+\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)|^2 = |2+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)|^2\\
&= \left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)^2 = 20+8\sqrt{3}
\end{aligned}$$



Exercice 2

1. (a) Soit $z_{\mathrm{A}} = 1-\mathrm{i}$; alors $z_{\mathrm{A}'} = (1-\mathrm{i})^2 - 4(1-\mathrm{i}) = 1-1-2\mathrm{i}-4+4\mathrm{i} = -4+2\mathrm{i}$.
Soit $z_{\mathrm{B}} = 3+\mathrm{i}$; alors $z_{\mathrm{B}'} = (3+\mathrm{i})^2 - 4(3+\mathrm{i}) = 9-1+6\mathrm{i}-12-4\mathrm{i} = -4+2\mathrm{i} = z_{\mathrm{A}'}$.

   (b) Supposons que z_1 et z_2 aient la même image par f, alors :
$z_1^2-4z_1 = z_2^2-4z_2 \iff z_1^2-z_2^2-4z_1+4z_2 = 0 \iff (z_1+z_2)(z_1-z_2)-4(z_1-z_2) = 0 \iff (z_1-z_2)(z_1+z_2-4) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z_1-z_2 &=& 0\\ z_1+z_2-4 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z_1 &=& z_2\\ z_1+z_2 &=& 4\end{array}\right.$
Conclusion : si deux points ont la même image :
   – ou ils sont égaux ;
   – ou ils sont symétriques autour du point d'affixe 2 (car $\dfrac{z_1+z_2}{2} = 2$).

2. (a) OMIM' est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales [OI] et $[MM']$ ont le même milieu soit si $-\dfrac{3}{2} = \dfrac{z+z'}{2} \iff -3 = z+z' \iff -3 = z+z^2 \ -4z \iff z^2-3z+3 = 0$.

   (b) $z^2-3z+3=0 \iff \left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+3=0 \iff \left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=0 \iff \left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2=0.$
D'où les deux solutions : $z_1 = \dfrac{3}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3}{2}-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

3. (a) $(z'+4) = z^2-4z+4 = (z-2)^2$. De cette égalité il découle :
   – en égalant les modules $|z'+4| = \left|(z-2)^2\right| = |z-2|^2$,
   – en égalant les arguments $\arg(z'+4) = \arg\left[(z-2)^2\right]\ (2\pi) = 2\arg(z-2)\ (2\pi)$.

   (b) Si un point M appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon 2, alors $|z-2| = 2$; d'après la question précédente son image M' a une affixe z' telle que $|z'+4| = |z-2|^2 = 2^2 = 4$: ceci signifie que M' appartient au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre K et de rayon 4.

   (c) $z_{\mathrm{E}} = -4-3\mathrm{i}$. Donc $(z_{\mathrm{E}}+4) = -4-3\mathrm{i}+4 = -3\mathrm{i} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
D'après la question **3. a.** il résulte que $\arg(z-2) = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.
De $(z'+4) = (z-2)^2$ il découle que ou $z-2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ ou $z-2 = -\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$, soit $2+\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ ou $2-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ ou encore $z_1 = 2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ou $z_2 = 2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.