

Devoir de Mathématiques n°5

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer les limites de la fonction $f(x) = xe^x - x^2$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Simplifier l'expression $g(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{2x} + e^x} - e^{-x}$.
3. Étudier les variations de la fonction $h(x) = \frac{e^x}{2x + 1}$, montrer qu'elle admet un minimum sur \mathbb{R}_+ et exprimer sa valeur en fonction de e .

Exercice 2 (6 points)

1. Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes $a = -5e^{3i\pi}$, $b = \frac{-1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$, $c = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $d = 2e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
2. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes $m = -7$, $n = -2i$, $p = i - 1$ et $q = i - \sqrt{3}$.
3. Calculer q^7 et $\frac{i}{p^5}$ sous forme algébrique.

Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction $\varphi(x) = 6xe^{-\frac{(x+1)^2}{12}}$.

1. Prouver que la fonction φ est définie sur \mathbb{R} et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Prouver que la fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} et montrer que $\varphi'(x) = (-x^2 - x + 6)e^{-\frac{(x+1)^2}{12}}$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction φ .
4. Construire la courbe représentative de la fonction φ dans un repère orthonormal.