Correction du devoir de Mathématiques n°5

Exercice 1

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   De plus $f(x) = xe^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $$g(x) = \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x} - e^{-x} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-e^{-x}(e^{2x}+e^x)}{e^{2x}+e^x} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-e^x-1}{e^{2x}+e^x} = \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x} = 1$$
3. La fonction $h(x) = \dfrac{e^x}{2x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ et $h'(x) = \dfrac{e^x \times (2x+1) - e^x \times 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$. On en déduit les variations de la fonction h :

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
h	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$h(\frac{1}{2})$	$\nearrow$

   La fonction h admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$ qui vaut $h(\frac{1}{2}) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

Exercice 2

1. $$\begin{aligned}
a &= -5\left(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) = -5(-1+0i) = 5\\
b &= -e^{i\frac{\pi}{2}} = -i\\
c &= 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2\sqrt{3}i\\
d &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$
2. $$m = 7e^{i\pi} \qquad n = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad p = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad q = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$
3. $$\begin{aligned}
q^7 &= \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^7 = 2^7 e^{i\frac{35\pi}{6}} = 128e^{-i\frac{\pi}{6}} = 64\sqrt{3} - 64i\\
\frac{i}{p^5} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la fonction $\varphi(x) = 6xe^{-\frac{(x+1)^2}{12}}$.

1. La fonction φ est obtenue par produit et composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.
   De plus :
   $$\varphi(x) = \frac{72}{x+2+\frac{1}{x}} \frac{(x+1)^2}{12} e^{-\frac{(x+1)^2}{12}}$$
   Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} Xe^{-X} = 0$ on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$.
2. La fonction φ est obtenue par produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\varphi'(x) = 6 \times e^{-\frac{(x+1)^2}{12}} + 6x \times \left(-\frac{x+1}{6}\right) e^{-\frac{(x+1)^2}{12}} = (6 - x^2 - x)e^{-\frac{(x+1)^2}{12}} = (-x^2 - x + 6)e^{-\frac{(x+1)^2}{12}}$$
3. On en déduit les variations de la fonction φ :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-18e^{-\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	$12e^{-\frac{3}{4}}$	$\searrow$	0

4. La courbe représentative de la fonction φ dans un repère orthonormal est la suivante :