Correction du devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

1. On a $\lim_{x\to+\infty} x+e^x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0_+$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

   De plus $f(x)=xe^x\left(1+\dfrac{e^x}{x}\right)$ or $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2. $$g(x)=\frac{e^{-x}+1}{e^{1-x}}-e^{-1}=\frac{e^{-x}+1-e^{-1}(e^{1-x})}{e^{1-x}}=\frac{e^{-x}+1-e^{-x}}{e^{1-x}}=\frac{1}{e^{1-x}}=e^{x-1}$$

3. La fonction $h(x)=(x+1)e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=1\times e^x+(x+1)\times e^x=(x+2)e^x$. On en déduit les variations de la fonction h :

x		-2	
h	$\searrow$	$h(-2)$	$\nearrow$

   La fonction h admet un minimum qui vaut $h(-2)=-e^{-2}=-\dfrac{1}{e^2}$.

Exercice 2

1.
$$\begin{aligned}
a &= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=3(0+1i)=3i\\
b &= -e^{i\pi}=-(-1)=1\\
c &= 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i\\
d &= i+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=i+\left(-\frac{1}{2}\right)+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.
$$m=5e^{i\pi}\qquad n=3e^{i\frac{\pi}{2}}\qquad p=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\qquad q=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

3.
$$\begin{aligned}
q^7 &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^7=2^7e^{i\frac{7\pi}{3}}=128e^{i\frac{\pi}{3}}=64+64i\sqrt{3}\\
\frac{i}{p^3} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^3}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{9\pi}{4}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{11\pi}{4}}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la fonction $\varphi(x) = 10xe^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$.

1. La fonction φ est obtenue par produit et composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.
   De plus :
   $$\varphi(x) = \frac{40}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \frac{\frac{(x+1)^2}{4}}{e^{\frac{(x+1)^2}{4}}}$$
   Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.
2. La fonction φ est obtenue par produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\varphi'(x) = 10 \times e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} + 10x \times \left(-\frac{x+1}{2}\right) e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = (10 - 5x(x+1))e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = (-5x^2 - 5x + 10)e^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$$
3. On en déduit les variations de la fonction φ :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	↘	$-20e^{-\frac{1}{4}}$	↗	$\frac{10}{e}$	↘	0

4. La courbe représentative de la fonction φ dans un repère orthonormal est la suivante :