# Correction du devoir de Mathématiques n°4

## Exercice 1

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x-e^{-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0_{+}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
   De plus $f(x)=\dfrac{x}{e^x}\left(1-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
2. $$g(x)=\frac{e^x+1}{e^{x-1}}-e^1=\frac{e^x+1-e^1(e^{x-1})}{e^{x-1}}=\frac{e^x+1-e^x}{e^{x-1}}=\frac{1}{e^{x-1}}=e^{-x+1}$$
3. La fonction $h(x)=(x+2)e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=1\times e^x+(x+2)\times e^x=(x+3)e^x$. On en déduit les variations de la fonction $h$ :

| $x$ | | $-3$ | |
|---|---|---|---|
| $h$ | $\searrow$ | $h(-3)$ | $\nearrow$ |

   La fonction $h$ admet un minimum qui vaut $h(-3)=-e^{-3}=-\dfrac{1}{e^3}$.

## Exercice 2

1. $$\begin{aligned}
a &= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=3(0-1i)=-3i\\
b &= -e^{-i\pi}=-(-1)=1\\
c &= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i\\
d &= -i-\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=-i-\left(-\frac{1}{2}\right)-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$
2. $$m=3e^{0i}\qquad n=5e^{-i\frac{\pi}{2}}\qquad p=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\qquad q=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
3. $$\begin{aligned}
q^7 &= \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^7=2^7e^{-i\frac{7\pi}{3}}=128e^{-i\frac{\pi}{3}}=64-64i\sqrt{3}\\
\frac{i}{p^3} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i
\end{aligned}$$

# Exercice 3

On considère la fonction $\varphi(x) = 10xe^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$.

1. La fonction $\varphi$ est obtenue par produit et composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.
   De plus :
   $$\varphi(x) = \frac{40}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \frac{\frac{(x+1)^2}{4}}{e^{\frac{(x+1)^2}{4}}}$$
   Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.
2. La fonction $\varphi$ est obtenue par produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\varphi'(x) = 10 \times e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} + 10x \times \left(-\frac{x+1}{2}\right) e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = (10-5x(x+1))e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = (-5x^2-5x+10)e^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$$
3. On en déduit les variations de la fonction $\varphi$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-20e^{-\frac{1}{4}}$ | $\nearrow$ | $\frac{10}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

4. La courbe représentative de la fonction $\varphi$ dans un repère orthonormal est la suivante :