

Correction du devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^{-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0_+$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De plus $f(x) = \frac{x}{e^x} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2.

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^{x-1}} - e^1 = \frac{e^x + 1 - e^1(e^{x-1})}{e^{x-1}} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^{x-1}} = e^{-x+1}$$

3. La fonction $h(x) = (x+2)e^x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = 1 \times e^x + (x+2) \times e^x = (x+3)e^x$. On en déduit les variations de la fonction h :

x	-3
h	\searrow \nearrow $h(-3)$

La fonction h admet un minimum qui vaut $h(-3) = -e^{-3} = -\frac{1}{e^3}$.

Exercice 2

1.

$$a = 3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 3(0 - 1i) = -3i$$

$$b = -e^{-i\pi} = -(-1) = 1$$

$$c = 5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$d = -i - \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = -i - \left(-\frac{1}{2} \right) - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

2.

$$m = 3e^{0i} \quad n = 5e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad p = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad q = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

3.

$$q^7 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^7 = 2^7 e^{-i\frac{7\pi}{3}} = 128e^{-i\frac{\pi}{3}} = 64 - 64i\sqrt{3}$$

$$\frac{i}{p^3} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^3} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Exercice 3

On considère la fonction $\varphi(x) = 10xe^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$.

1. La fonction φ est obtenue par produit et composée de fonctions définies sur \mathbb{R} donc elle est définie sur \mathbb{R} .

De plus :

$$\varphi(x) = \frac{40}{x \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \frac{\frac{(x+1)^2}{4}}{e^{\frac{(x+1)^2}{4}}}$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$.

2. La fonction φ est obtenue par produit et composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\varphi'(x) = 10 \times e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} + 10x \times \left(-\frac{x+1}{2}\right) e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = (10 - 5x(x+1))e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = (-5x^2 - 5x + 10)e^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$$

3. On en déduit les variations de la fonction φ :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0
$\varphi(x)$	0	\searrow	\nearrow	\searrow
		$-20e^{-\frac{1}{4}}$	$\frac{10}{e}$	0

4. La courbe représentative de la fonction φ dans un repère orthonormal est la suivante :

