Équations différentielles

Définition 1. *Une* équation différentielle *du premier ordre est une équation dont l'inconnue est une fonction f et dans laquelle apparaît la dérivée f' de la fonction f.*

Exemple 1. *La fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ est solution de l'équation différentielle $f'(x) + x[f(x)]^2 = 0$.*

Nous allons étudier de manière générale les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, c'est à dire les équations différentielles de la forme $af'(x)+bf(x)+c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On note souvent de manière abusive ces équations sous la forme simplifiée $af' + bf + c = 0$.

Théorème 1. *Les solutions de l'équation différentielle $f' = kf$ où $k \in \mathbb{R}$ sont les fonctions $f(x) = Ce^{kx}$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. au programme en étudiant la fonction $g(x) = f(x)e^{-kx}$. □

Corollaire 1. *Soit $(x_0; y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'équation différentielle $f' = kf$ où $k \in \mathbb{R}$ admet une solution unique vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.*

Démonstration. au programme. □

Théorème 2. *Les solutions de l'équation différentielle $f' = af + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ sont les fonctions $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. au programme en étudiant la fonction $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. □

Corollaire 2. *Soit $(x_0; y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'équation différentielle $f' = af + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ admet une solution unique vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.*

Démonstration. au programme. □

Exercice 1. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$f' + 2f = 0$$

$$f' - 2f + 3 = 0$$

$$f' + 3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f' - 3f - 15 & = & 0 \\ f(0) & = & -\frac{9}{2} \end{array} \right.$$