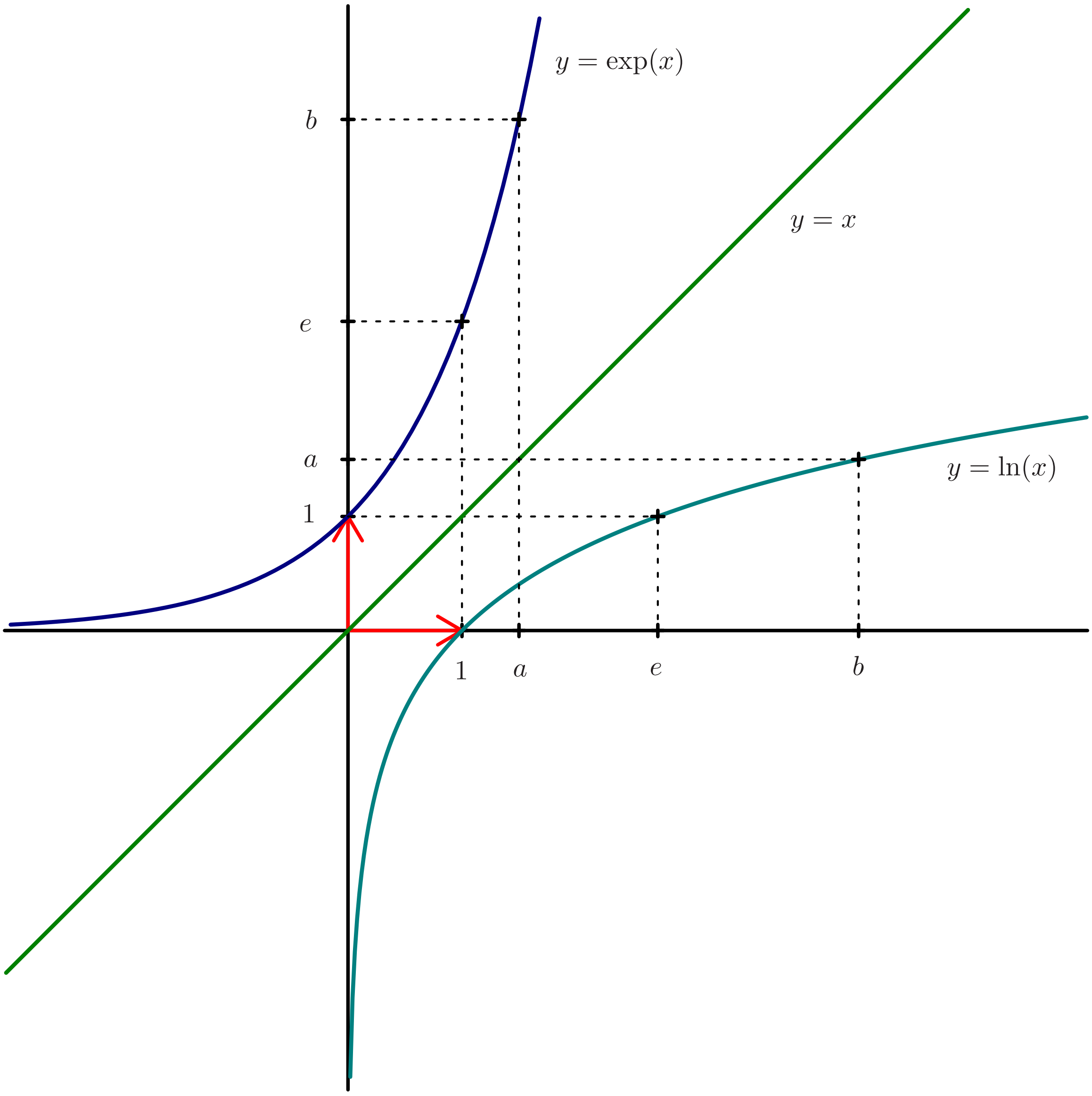
Fonction logarithme népérien

Définition 1. *Pour tout réel $b \in]0; +\infty[$, l'équation $e^a = b$ admet une unique solution réelle a, on la note $a = \ln(b)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$ est appelée fonction* logarithme népérien*, c'est la fonction réciproque de l'exponentielle.*



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété 1.

1. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.
2. $\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e) = 1$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\ln(e^x) = x$.
4. *Pour tout* $y \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $e^{\ln(y)} = y$.

1 Relation fonctionnelle caractérisant la fonction logarithme népérien

Lemme 1. *Pour tous réels α et β, on a* $\alpha = \beta \Leftrightarrow \exp(\alpha) = \exp(\beta)$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a* $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 3. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 1. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a* $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on a* $\ln(x^n) = n\ln(x)$ *et* $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Démonstration. au programme. □

2 Étude de la fonction logarithme népérien

Théorème 1. *La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration. On admet continuité et dérivabilité et on étudie la fonction $g(x) = \exp[\ln(x)]$. □

Corollaire 3. *Les primitives de la fonction inverse sur l'intervalle $]0;+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$. La fonction logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.*

Démonstration. au programme. □

Corollaire 4. *Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $f(x) = \ln[u(x)]$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et* $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 5. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.*

Démonstration. au programme. □

Propriété 4.

$$\lim_{x \to 0_+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Démonstration. au programme. □

Propriété 5.

$$\lim_{x \to 0_+} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Démonstration. au programme en montrant que $\ln x < \sqrt{x}$ pour $x > 0$. □