Fonctions Exponentielles - Fonctions Logarithmes

1 Fonctions exponentielles

Définition 1. *Soit a un réel strictement positif, on appelle fonction* exponentielle de base a, *la fonction* $\exp_a : x \mapsto e^{x \ln a}$.

Remarque 1. *On a* $\exp_e = \exp$.

Propriété 1. *Soit a un réel strictement positif, pour x et y réels on a* $\boxed{\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)}$.

On convient donc d'adopter la notation $\exp_a(x) = a^x$.

Propriété 2. *Soit a un réel strictement positif, la fonction $\exp_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et* $\exp'_a(x) = \ln(a)\exp_a(x)$.

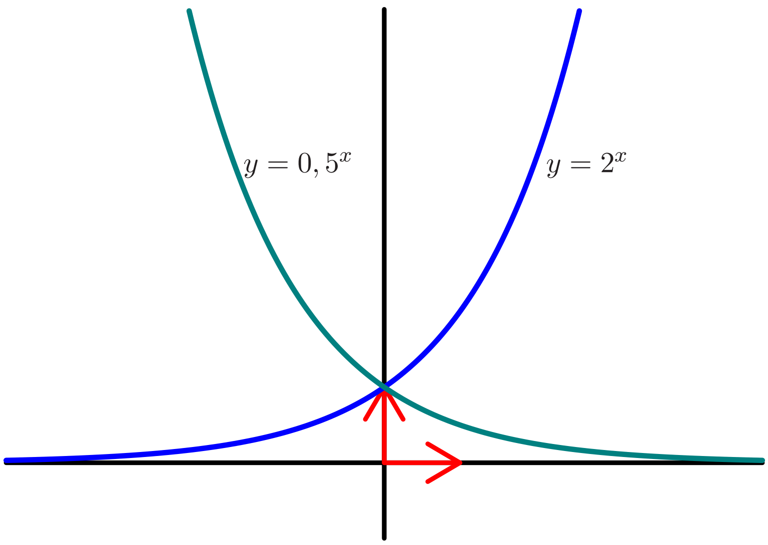
Corollaire 1. *Soit a un réel strictement positif, la fonction $\exp_a$ est :*
- *strictement décroissante si* $0 < a < 1$.
- *constante égale à* 1 *si* $a = 1$.
- *strictement croissante si* $a > 1$.

$0 < a < 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a$	$+\infty$	$\searrow$	0

$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Propriété 3. *Soit y_0 un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n = y_0$ admet une unique solution réelle* positive *x_0 appelée racine $n^{\text{ème}}$ de y_0 et notée $\sqrt[n]{y_0}$.*

Propriété 4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pour $x > 0$.*

2 Fonctions logarithmes

Définition 2. *Soit a un réel strictement positif différent de 1, on appelle fonction* logarithme de base a*, la fonction $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$.*

Remarque 2. *On a* $\log_e = \ln$.

Propriété 5. *Soit a un réel strictement positif différent de 1, pour x et y réels strictement positifs on a* $\boxed{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)}$.

Propriété 6. *Soit a un réel strictement positif différent de 1, la fonction $\log_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.*

Propriété 7. *Soit y_0 un réel strictement positif et a un réel strictement positif différent de 1, l'équation $a^x = y_0$ admet une unique solution réelle x_0 et $x_0 = \log_a(y_0)$.*