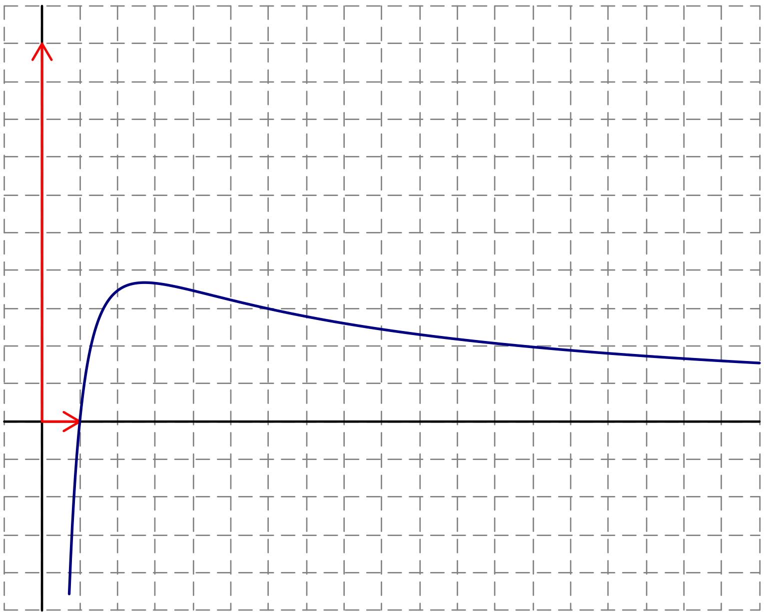
Devoir maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les couples solutions de l'équation (E) : $x^y = y^x$ et en particulier les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.



La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction h est donnée ci-dessus, on appelle x_0 l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

(a) Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

(b) Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h et retrouver les variations de la fonction h.
Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

(c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$.
Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.
Ainsi le couple $(a,\ b)$ est solution de (E).
4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

(a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

(b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

(c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4\text{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

   (a) Écrire a et b sous forme exponentielle.

   (b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; −1), (D ; + 1), (B ; + 1).

   (a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\text{i}$.

   (b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

   (c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.

   (d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5. Quelle est la nature du triangle AGC ?