

Devoir maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, les couples solutions de l'équation (E) : $x^y = y^x$ et en particulier les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.



La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction h est donnée ci-dessus, on appelle x_0 l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- (a) Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.
 - (b) Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h et retrouver les variations de la fonction h .
Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.
 - (c) Déterminer l'intersection de la courbe \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
3. Soit λ un élément de l'intervalle $]0 ; \frac{1}{e}[$.
Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1 ; e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e ; +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.
Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).
 4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1 ; e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e ; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes
 - (a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?
 - (b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?
 - (c) Déterminer les variations de la fonction s . Dresser le tableau de variations de s .
 5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad b = 4\sqrt{3} + 4i.$$

- (a) Écrire a et b sous forme exponentielle.
 (b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
 Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; -1), (D ; +1), (B ; +1).
 (a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
 (b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
 (c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.
 (d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. Quelle est la nature du triangle AGC ?