

Démonstration par récurrence

Définition. Une propriété dépendant d'un entier naturel est héréditaire lorsque si elle est vraie pour un certain rang n alors elle est vraie pour le rang $n + 1$.

Axiome. On considère une propriété dépendant d'un entier naturel. Si cette propriété est vraie pour le rang n_0 et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemples

1. On considère la propriété (P_n) : $4^n + 2$ est un multiple de 3.
 - (a) Montrer que la propriété est vraie pour le rang $n = 0$.
 - (b) On suppose que la propriété est vraie pour le rang n et on pose $4^n + 2 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'alors la propriété est vraie pour le rang $n + 1$. (On pourra chercher à exprimer $4^{n+1} + 2$ en fonction de k)
 - (c) Montrer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la propriété (P_n) : $8^n + 1$ est un multiple de 7.
 - (a) Montrer que la propriété P_n est héréditaire.
 - (b) Que peut-on en déduire ?

Application

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

Propriété 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Propriété 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Propriété 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

Propriété 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction sinus est n fois dérivable et on a $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Propriété 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.