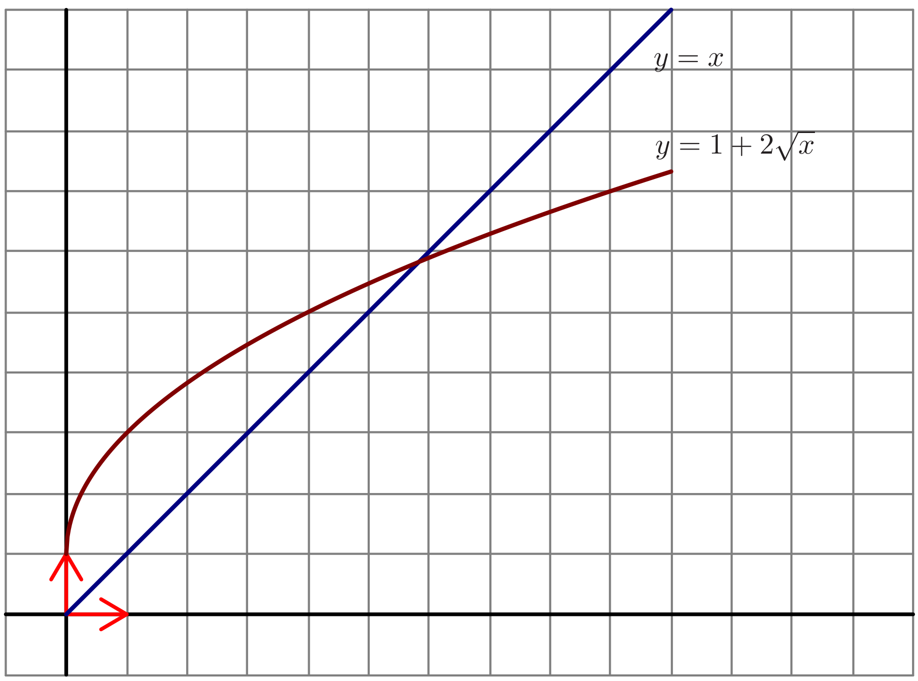
Étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + 2\sqrt{u_n}$.

Étude graphique

1. Représenter les quatre premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous dans le cas où $u_0 = 1$ et dans le cas où $u_0 = 9$, on n'utilisera pas de calculatrice mais on pourra lire graphiquement les valeurs de la fonction $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$.



2. Que peut-on conjecturer à propos des variations et de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $u_0 = 1$ et $u_0 = 9$?
3. Calculer l'abscisse α du point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Étude argumentée

A. Cas où $u_0 = 1$

On suppose dans cette partie que $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 9.
3. En utilisant les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$, démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

B. Cas où $u_0 = 9$

On suppose dans cette partie que $u_0 = 9$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

C. Cas général

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante si $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$ et décroissante si $u_0 \geqslant \alpha$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente si $u_0 \geqslant 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.