Suites numériques

Définition 1. *Une suite réelle* (u) *est une fonction de* $\mathbb{N}$ *ou d'une partie de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On appelle* terme *de* rang n *de la suite le nombre réel* $u_n = u(n)$.

Exemple 1.

1. $u_n = n^2 + 1$, $n \geqslant 0$ *est une suite définie sous* forme explicite
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & (u_n)^2 + 1 \ , \ n \geqslant 0 \end{array} \right.$ *est une suite définie sous* forme récurrente.

Définition 2. *Une propriété dépendant d'un entier naturel est* héréditaire *lorsque si elle est vraie pour un certain rang* n *alors elle est vraie pour le rang* $n+1$.

Axiome 1. *On considère une propriété dépendant d'un entier naturel. Si cette propriété est vraie pour le rang* n_0 *et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel* $n \geqslant n_0$.

Exercice 1. *Prouver par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 3.

1. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* majorée *si il existe un réel* M *tel que* $u_n \leqslant M$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
2. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* minorée *si il existe un réel* m *tel que* $u_n \geqslant m$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
3. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* bornée *si elle est minorée et majorée.*

Exemple 2. *La suite* $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $n \geqslant 0$ *est bornée.*

Définition 4.

1. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* constante *si* $u_{n+1} = u_n$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
2. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* croissante *si* $u_{n+1} \geqslant u_n$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
3. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* décroissante *si* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
4. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* monotone *si elle est croissante ou décroissante.*

Exemple 3. *La suite* $u_n = 3n + 4$ *est croissante.* *(on pourra utiliser la croissance de la fonction* $f(x) = 3x + 4$*)*

Propriété 1.

1. *Une suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* croissante *si et seulement si* $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
2. *Une suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est* décroissante *si et seulement si* $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
3. *Une suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ strictement positive *est* croissante *si et seulement si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
4. *Une suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ strictement positive *est* décroissante *si et seulement si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ *pour tout* $n \geqslant 0$.

Démonstration. au programme. □

Définition 5. *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite* convergente *vers un réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_0. Une suite qui ne converge pas est dite* divergente

Exemple 4.

La suite $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $n \geqslant 0$ converge vers 2.

La suite $u_n = n^2 + 1$, $n \geqslant 0$ diverge.

La suite $u_n = (-1)^n$, $n \geqslant 0$ diverge.

Propriété 2. *Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge alors il existe un unique réel l vers lequel elle converge, l est appelé* limite *de la suite (u_n) et on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Démonstration. au programme en raisonnant par l'absurde. □

Théorème 1. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. au programme. □

La réciproque de ce théorème est fausse !

Contre-exemple 1. *La suite bornée $u_n = (-1)^n$, $n \geqslant 0$ diverge.*

On peut cependant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. Théorème de convergence monotone

1. *Une suite croissante majorée converge.*
2. *Une suite décroissante minorée converge.*

Démonstration. admis. □

Définition 6.

1. *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0. On note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

2. *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$, $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0. On note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Exemple 5. *La suite $u_n = n^2 + 1$, $n \geqslant 0$ diverge vers $+\infty$.*

Propriété 3.

1. *Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*
2. *Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. au programme. □

Définition 7. *Les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont dites* adjacentes *si :*
- *(u_n) est croissante et (v_n) décroissante.*
- *la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.*

Exemple 6. *Les suites $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ et $v_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ sont adjacentes.*

Propriété 4. *Si deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.*

Démonstration. au programme en raisonnant par l'absurde et en utilisant un passage à la limite. □

Propriété 5. *Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.*

Démonstration. au programme en utilisant le théorème de convergence monotone. □