Devoir maison de Mathématiques n°5

Exercice

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et étudier ses variations.

   (b) Montrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.

   (c) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1;2]$.

2. On considère les suites :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n)\ ,\ n \geqslant 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & f(v_n)\ ,\ n \geqslant 0 \end{array}\right.$$

   (a) Construire sur le graphique précédent les trois premiers termes des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

   (b) Démontrer par récurrence que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante.

   (d) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(1+u_n)(1+v_n)}$$

   (e) En déduire que $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant (\frac{1}{4})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (f) Prouver que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et déterminer leurs limites.