Correction du devoir maison de Mathématiques n°5

Exercice

1. (a) La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est définie et dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ et :

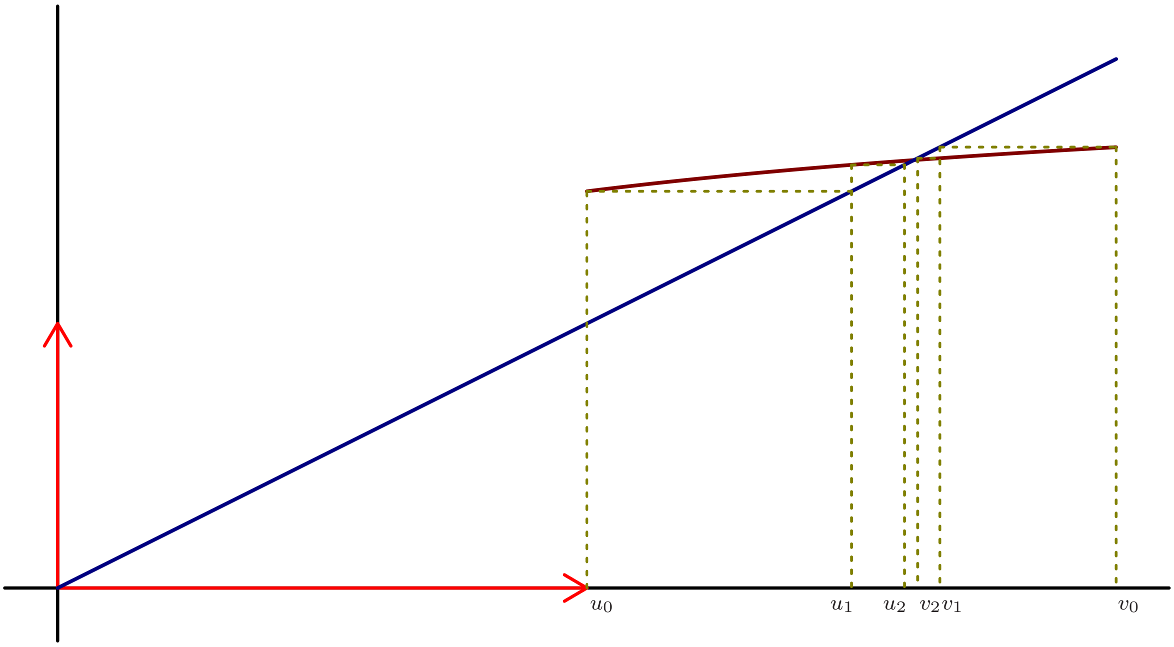
$$f'(x) = \frac{2\times(x+1)-(2x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

On en déduit les variations de la fonction f :

x		-1	
f	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$

(b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ donc si $1 \leqslant x \leqslant 2$ alors $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$ soit $\frac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{3}$ et *a fortiori* $f(x) \in [1;2]$.

(c)



2. (a)

(b) On considère la propriété (P_n) : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

- *Initialisation* : (P_0) est vraie car $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ appartiennent à l'intervalle $[1;2]$.
- *Hérédité* : Supposons (P_n) vraie alors d'après la question (1) $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(v_n) = v_{n+1}$ appartiennent à l'intervalle $[1;2]$, la propriété (P_{n+1}) est donc vraie.
- *Conclusion* : La propriété (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après l'*axiome de récurrence* elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On considère la propriété (P_n) : $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \geqslant v_{n+1}$.
- *Initialisation* : (P_0) est vraie car $1 = u_0 \leqslant u_1 = \frac{3}{2}$ et $2 = v_0 \geqslant v_1 = \frac{5}{3}$.
- *Hérédité* : Supposons (P_n) vraie alors comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1;2]$ on a $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $v_{n+1} = f(v_n) \geqslant f(v_{n+1}) = v_{n+2}$, la propriété (P_{n+1}) est donc vraie.
- *Conclusion* : La propriété (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après l'*axiome de récurrence* elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= f(v_n) - f(u_n) \\
&= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\
&= \frac{(2u_n+1)(v_n+1) - (2v_n+1)(u_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)} \\
&= \frac{2u_nv_n + 2u_n + v_n + 1 - 2u_nv_n - 2v_n - u_n - 1}{(u_n+1)(v_n+1)} \\
&= \frac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}
\end{aligned}$$

(e) On considère la propriété (P_n) : $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant (\frac{1}{4})^n$.
- *Initialisation* : (P_0) est vraie car $v_0 - u_0 = 1 \leqslant (\frac{1}{4})^0 = 1$.
- *Hérédité* : Supposons (P_n) vraie, comme $2 \leqslant u_n + 1$ et $2 \leqslant v_n + 1$ on a $4 \leqslant (u_n+1)(v_n+1)$ et donc $\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leqslant \frac{1}{4}$ on en déduit $0 \leqslant \frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leqslant (\frac{1}{4})^n \times \frac{1}{4}$ soit $0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant (\frac{1}{4})^{n+1}$, la propriété (P_{n+1}) est donc vraie.
- *Conclusion* : La propriété (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après l'*axiome de récurrence* elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f)
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 2 donc d'après le *Théorème de convergence monotone* elle converge vers un réel l.
- La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 1 donc d'après le *Théorème de convergence monotone* elle converge vers un réel l'.
- D'après l'inégalité de la question précédente ainsi que le *Théorème des Gendarmes* la suite $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $l' - l = 0$ donc $l' = l$.
- On a $u_{n+1} = f(u_n)$, comme f est continue on obtient en passant à la limite pour $n \to +\infty$ que $l = f(l)$ soit $l = \frac{2l+1}{l+1}$ ce qui conduit à une équation de degré 2 de solutions $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de plus $u_n \in [1;2]$ donc $l \in [1;2]$ et par conséquent $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.