

## Devoir de Mathématiques n°7

### Exercice 1 (5 points)

On considère une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  dont aucun terme n'est nul et on définit la suite  $v_n = \frac{-2}{u_n}$ .  
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez.

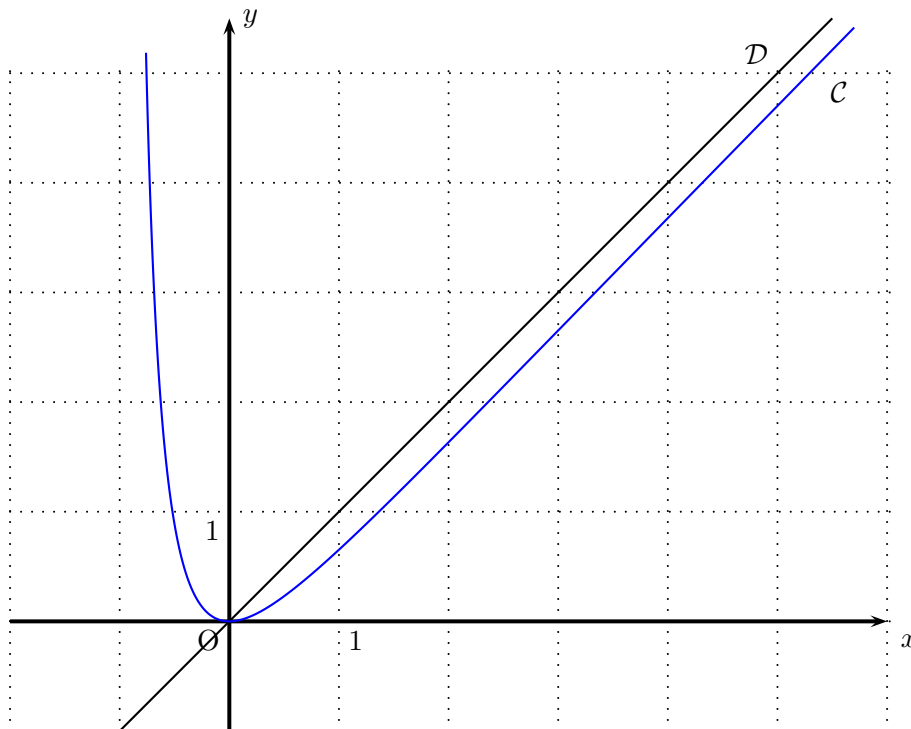
1. Si  $(u_n)$  est croissante alors  $(v_n)$  est décroissante.
2. Si  $(u_n)$  est convergente alors  $(v_n)$  est convergente.
3. Si  $(u_n)$  est minorée par 2 alors  $(v_n)$  est minorée par  $-1$ .
4. Si  $(u_n)$  est divergente alors  $(v_n)$  converge vers 0.
5. Si  $(v_n)$  converge vers 0 alors  $(u_n)$  est divergente.

### Exercice 2 (15 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$  est donnée ci-dessous :



**Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe  $\mathcal{C}$** 

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $] - 1 ; +\infty[$ .
2. Pour tout  $x$  de l'intervalle  $] - 1 ; +\infty[$ , on pose  $N(x) = (1 + x)^2 - 1 + \ln(1 + x)$ .  
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur  $] - 1 ; +\infty[$ .  
Calculer  $N(0)$ . En déduire les variations de la fonction  $f$ .
3. Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x$ . Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction  $f$** 

1. Démontrer que si  $x \in [0 ; 4]$ , alors  $f(x) \in [0 ; 4]$ .
2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (a) En utilisant la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$  représentées sur l'énoncé, placer  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses.
- (b) Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $u_n \in [0 ; 4]$ .
- (c) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- (d) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On désigne par  $l$  sa limite.
- (e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de  $l$ .