Devoir de Mathématiques n°7

Exercice 1 *(5 points)*

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dont aucun terme n'est nul et on définit la suite $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

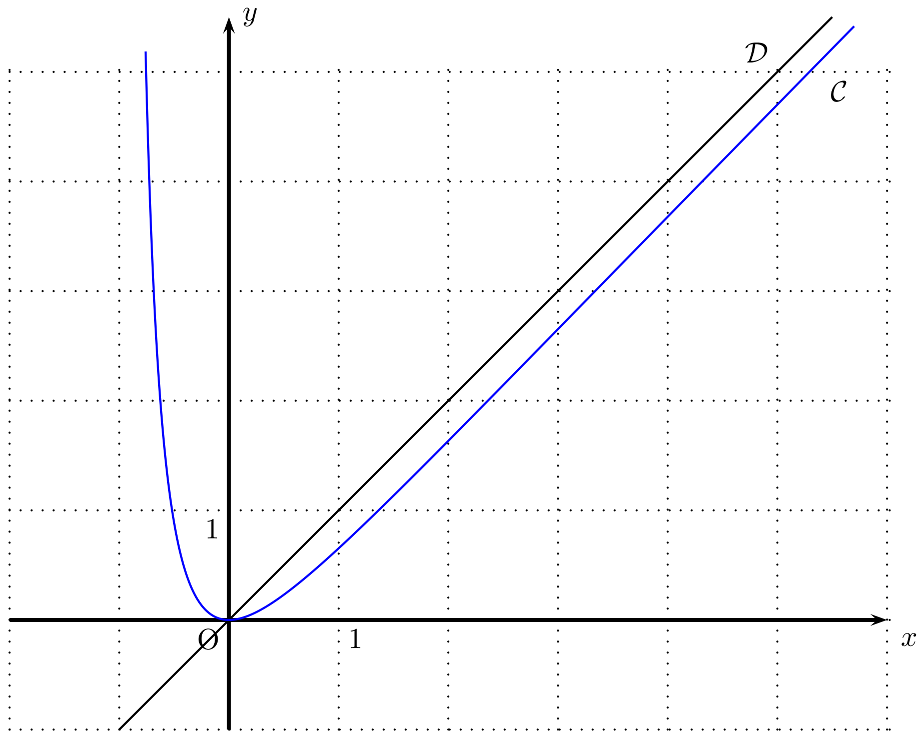
1. Si (u_n) est croissante alors (v_n) est décroissante.
2. Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
3. Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par -1.
4. Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.
5. Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) est divergente.

Exercice 2 *(15 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée ci-dessous :



Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Calculer $N(0)$. En déduire les variations de la fonction f.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

   (a) En utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ représentées sur l'énoncé, placer u_0 , u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

   (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

   (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

   (d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par l sa limite.

   (e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de l.