

## Correction du devoir de Mathématiques n°7

### Exercice 1

1. FAUX : Si  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$  alors  $v_0 = -2$  et  $v_1 = -1$  et  $v_0 < v_1$ .
2. FAUX : Si  $u_n = \frac{1}{n+1}$  (convergente vers 0) alors  $v_n = -2(n+1)$  (divergente vers  $-\infty$ ).
3. VRAI : Si  $2 \leq u_n$  alors  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n}$  et  $-1 \leq \frac{-2}{u_n} = v_n$ .
4. FAUX : Si  $u_n = (-1)^n$  (divergente) alors  $v_n = -2(-1)^n$  (divergente).
5. VRAI : Si  $(v_n)$  converge vers 0 alors  $|u_n| = \frac{2}{|v_n|}$  diverge vers  $+\infty$  donc  $(u_n)$  ne peut être convergente.

### Exercice 2

#### Partie A

1. La fonction  $f$  est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur  $] -1 ; +\infty[$ .  
On a :

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x) \times 1}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(1+x)^2}$$

2. On a  $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$ . La fonction  $N$  est dérivable sur  $] -1 ; +\infty[$  comme somme et composée de fonctions dérivables.

On a :

$$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$$

Comme  $x$  appartient à  $] -1 ; +\infty[$ ,  $1+x > 0$  et par conséquent,  $N(x) > 0$ . On en déduit que  $N$  est croissante sur  $] -1 ; +\infty[$ .

$N(0) = 0$  donc  $N(x) < 0$  pour  $x \in ] -1 ; 0[$  et  $N(x) > 0$  pour  $x > 0$ .

De plus  $f'(x) = \frac{N(x)}{(1+x)^2}$  est du signe du numérateur  $N(x)$  car  $(1+x)^2 > 0$  pour tout  $x$ .

Par conséquent,  $f'(x) < 0$  pour  $x \in ] -1 ; 0[$ ,  $f'(0) = 0$  et  $f'(x) > 0$  pour  $x > 0$ .

On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$  :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

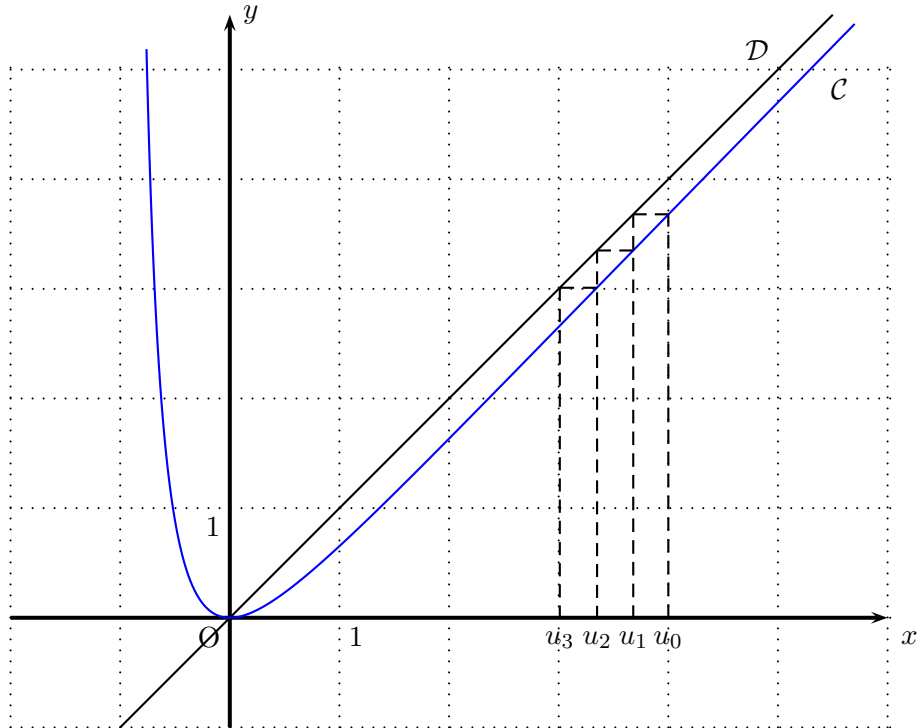
3. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{C}$ , on résout l'équation  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Comme  $f(0) = 0$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  se coupent à l'origine du repère.

## Partie B

1. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  donc pour tout  $x$  de  $[0 ; 4]$ ,  $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(4)$  de plus  $f(4) = 4 - \frac{\ln 5}{5} < 4$  donc  $f(x) \in [0 ; 4]$ .
2. (a)



- (b) Démontrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0 ; 4]$ .
  - Initialisation :  $u_0 = 4 \in [0 ; 4]$  donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .
  - Hérédité : supposons que  $u_n \in [0 ; 4]$  pour un entier  $n$ . Alors  $u_{n+1} = f(u_n) \in [0 ; 4]$  d'après 1.
  - Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
 Par conséquent,  $u_n \in [0 ; 4]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leq 0$  car  $1+u_n \geq 1$  d'où  $\ln(1+u_n) \geq 0$ .  
Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- (d) La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel  $l$ .
- (e) On a  $u_{n+1} = f(u_n)$ , comme  $f$  est continue on obtient par passage à la limite que  $l = f(l)$ , on en déduit d'après la question A.3. que  $l = 0$ .