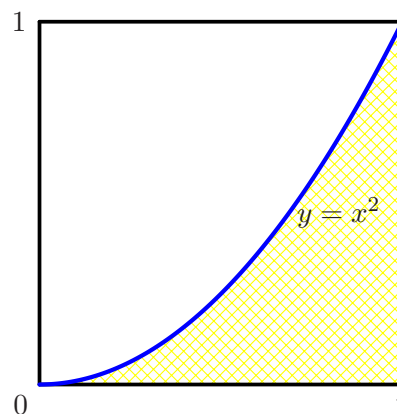


## Calcul de l'aire sous une parabole par la méthode des rectangles

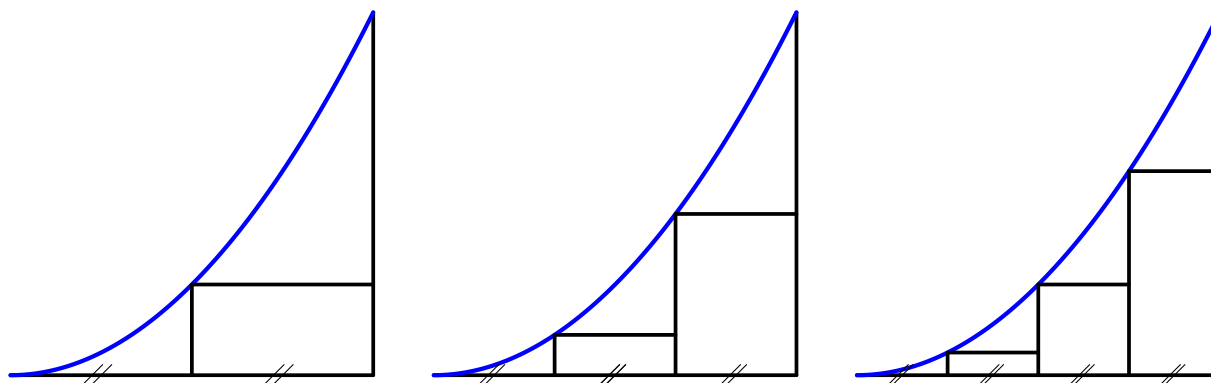
Dans un repère orthonormal, on cherche à calculer l'aire de la surface  $\mathcal{S}$  délimitée par l'axe des abscisses, la parabole d'équation  $y = x^2$  ainsi que les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

On a  $\mathcal{S} = \{(x; y) , 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq x^2\}$ .

On note  $A$  l'aire de  $\mathcal{S}$ .



L'idée est d'approcher la surface  $\mathcal{S}$  de plus en plus finement par un ensemble de rectangles de même largeur, la figure ci-dessous représente l'approximation de la surface  $\mathcal{S}$  par un puis deux et trois rectangles :



Plus généralement, on peut approcher la surface  $\mathcal{S}$  par un ensemble de  $n$  rectangles de même largeur, on note  $A_n$  l'aire totale de ces  $n$  rectangles.

1. Calculer  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ .
2. Exprimer  $A_n$  en fonction de  $n$ , on pourra pour simplifier l'expression obtenue utiliser la formule  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(A_n)_{n \geq 1}$ . En déduire l'aire  $A$ .
4. Généraliser le calcul de l'aire sous la parabole si la surface est délimitée par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = c$  avec  $0 \leq c$ .
5. En déduire l'aire sous la parabole si la surface est délimitée par les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  avec  $0 \leq a \leq b$ .