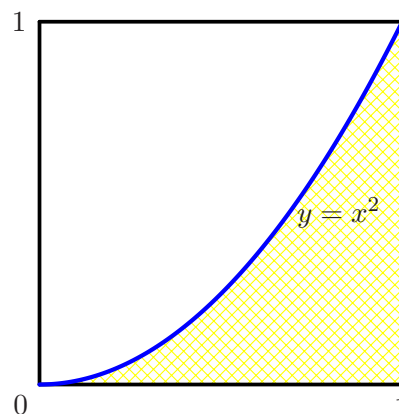


Calcul de l'aire sous une parabole par la méthode des rectangles

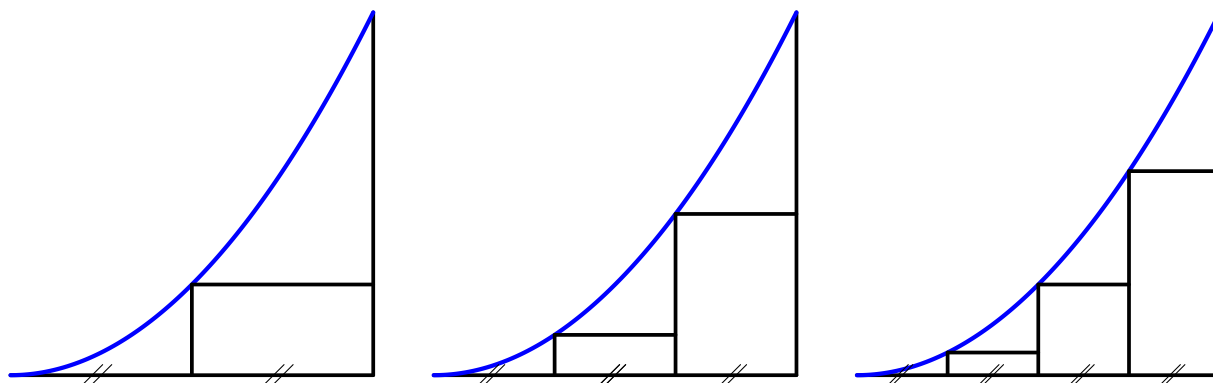
Dans un repère orthonormal, on cherche à calculer l'aire de la surface \mathcal{S} délimitée par l'axe des abscisses, la parabole d'équation $y = x^2$ ainsi que les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a $\mathcal{S} = \{(x; y) , 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq x^2\}$.

On note A l'aire de \mathcal{S} .



L'idée est d'approcher la surface \mathcal{S} de plus en plus finement par un ensemble de rectangles de même largeur, la figure ci-dessous représente l'approximation de la surface \mathcal{S} par un puis deux et trois rectangles :



Plus généralement, on peut approcher la surface \mathcal{S} par un ensemble de n rectangles de même largeur, on note A_n l'aire totale de ces n rectangles.

1. Calculer A_1, A_2, A_3 et A_4 .
2. Exprimer A_n en fonction de n , on pourra pour simplifier l'expression obtenue utiliser la formule $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$. En déduire l'aire A .
4. Généraliser le calcul de l'aire sous la parabole si la surface est délimitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = c$ avec $0 \leq c$.
5. En déduire l'aire sous la parabole si la surface est délimitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ avec $0 \leq a \leq b$.