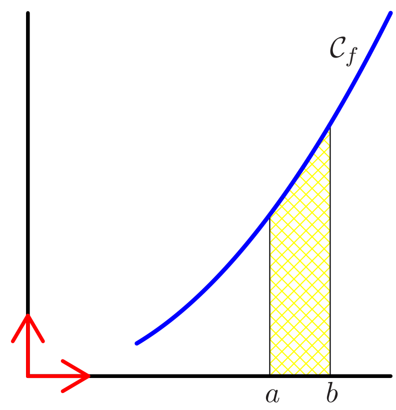
Intégration

1 Cas d'une fonction positive

Définition 1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée* intégrale de la fonction f entre a et b *et est notée :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Remarque 1. $\displaystyle\int_a^b 0\ \mathrm{d}x = 0$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

Exemple 1. *Calcul de* $\displaystyle\int_2^3 (2x+1)\mathrm{d}x$.

Théorème 1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$, de plus c'est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ s'annulant en a.*

Remarque 2. *Ce Théorème permet d'affirmer que toute fonction continue positive admet des primitives !*

Démonstration. au programme dans le cas d'une fonction f monotone, la dérivabilité de la fonction F étant prouvée au moyen d'un encadrement d'origine géométrique de la quantité $F(x+h) - F(x)$. □

Corollaire 1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 2. *Calcul de* $\displaystyle\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$.

Propriété 1. Relation de Chasles
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et trois réels $a \leqslant b \leqslant c$ de l'intervalle I, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. au programme, au moyen d'une interprétation géométrique. □

Propriété 2. Linéarité de l'intégrale
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel positif, alors :

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. au programme, en utilisant le Corollaire 1. □

Propriété 3. *Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$. Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. au programme, au moyen d'une interprétation géométrique. □

Corollaire 2. Inégalité de la moyenne
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Démonstration. au programme. □

Définition 2. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. On appelle* valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 3. *Calcul de la valeur moyenne de la fonction* sinus *sur l'intervalle* $[0;\pi]$.

2 Cas d'une fonction de signe quelconque

Définition 3. *Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle $[a;b]$, alors l'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à la somme des aires des domaines définis par les intervalles où la fonction f garde un signe constant multipliées par le coefficient -1 pour les intervalles où la fonction est négative.*

Exemple 4. *Interprétation géométrique de $\int_{-2}^{3}(x-1)\mathrm{d}x$.*

On admet que toutes les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque.

Propriété 4. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors :*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Démonstration. au programme. □

Propriété 5. Intégration par parties
Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle $[a;b]$ avec u' et v' continues, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)'v(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 5. *Calcul de $\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$.*

On peut également généraliser la notion d'intégrale pour des bornes en ordre décroissant :

Définition 4. *Soit f une fonction continue un intervalle $[a;b]$, alors :*

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables à l'exception de celles faisant intervenir l'ordre en particulier l'inégalité de la moyenne !