

Devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n) , pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (1+t)e^{-t} dt$$

- (a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{1+t} \leq 1+t$.
- (b) En déduire que $J_n \leq I_n$.
- (c) Calculer I_n en fonction de n . En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
- (d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 2

On considère la suite numérique (W_n) définie, pour tout entier naturel n , par ;

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Montrer par *Intégration Par Parties* que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire les valeurs de W_2 , W_3 et W_4 .