Devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (1+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{1+t} \leqslant 1+t$.

   (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

   (c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

   (d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 2

On considère la suite numérique (W_n) définie, pour tout entier naturel n, par ;

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer par *Intégration Par Parties* que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,W_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire les valeurs de W_2, W_3 et W_4.