

# Correction du devoir maison de Mathématiques n°6

## Exercice 1

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t} \sqrt{1+t} dt - \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt = \int_n^{n+1} e^{-t} \sqrt{1+t} dt$$

cette quantité est positive car  $e^{-t} \sqrt{1+t} \geq 0$  pour  $t \in [1; +\infty[$ , on en déduit que la suite  $(J_n)$  est croissante.

2. (a) Pour  $x \geq 1$  on a  $x \leq x^2$  d'où en appliquant la fonction racine carrée qui est croissante  $\sqrt{x} \leq x$ , on en déduit en posant  $x = 1+t$  que, pour tout  $t \geq 0$ , on a  $\sqrt{1+t} \leq 1+t$ .
- (b) en multipliant l'inégalité précédente par  $e^{-t}$  positif et en intégrant par rapport à  $t$  entre 1 et  $n$ , on obtient  $J_n \leq I_n$ .
- (c) On intègre par parties :

$$I_n = \int_1^n (1+t) \times e^{-t} dt = [(1+t) \times (-e^{-t})]_{t=1}^{t=n} - \int_1^n 1 \times (-e^{-t}) dt$$

$$I_n = -(n+1)e^{-n} + 2e^{-1} - [e^{-t}]_{t=1}^{t=n} = -(n+1)e^{-n} + 2e^{-1} - e^{-n} + e^{-1} = -\frac{(n+2)}{e^n} + \frac{3}{e}$$

On en déduit que  $J_n \leq I_n \leq \frac{3}{e}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

(d) La suite  $(J_n)$  est croissante et majorée donc elle converge. (Théorème de convergence monotone)

## Exercice 2

1. On a :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

2. On intègre par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \times (\cos t) dt = [(\cos t)^{n+1} \times (\sin t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\cos t)^n \sin t \times (\sin t) dt$$

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(\cos t)^n (\sin t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(\cos t)^n (1 - \cos t)^2 dt$$

$$W_{n+2} = (n+1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt \right) = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

d'où on tire  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3. On en déduit :

$$W_2 = \frac{0+1}{0+2} W_0 = \frac{\pi}{4} \quad W_3 = \frac{1+1}{1+2} W_1 = \frac{2}{3} \quad W_4 = \frac{2+1}{2+2} W_2 = \frac{3\pi}{16}$$