Correction du devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

cette quantité est positive car $\mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t} \geqslant 0$ pour $t \in [1;+\infty[$, on en déduit que la suite (J_n) est croissante.

2. (a) Pour $x \geqslant 1$ on a $x \leqslant x^2$ d'où en appliquant la fonction racine carrée qui est croissante $\sqrt{x} \leqslant x$, on en déduit en posant $x = 1+t$ que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $\sqrt{1+t} \leqslant 1+t$.

   (b) en multipliant l'inégalité précédente par e^{-t} positif et en intégrant par rapport à t entre 1 et n, on obtient $J_n \leqslant I_n$.

   (c) On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n (1+t)\times \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[(1+t)\times(-\mathrm{e}^{-t})\right]_{t=1}^{t=n} - \int_1^n 1\times(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\
I_n &= -(n+1)\mathrm{e}^{-n} + 2\mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=1}^{t=n} = -(n+1)\mathrm{e}^{-n} + 2\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-1} = -\frac{(n+2)}{\mathrm{e}^n} + \frac{3}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

   On en déduit que $J_n \leqslant I_n \leqslant \dfrac{3}{\mathrm{e}}$ pour tout entier naturel n non nul.

   (d) La suite (J_n) est croissante et majorée donc elle converge. (Théorème de convergence monotone)

Exercice 2

1. On a :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}t = [t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ \mathrm{d}t = [\sin t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

2. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1}\times(\cos t)\mathrm{d}t = \left[(\cos t)^{n+1}\times(\sin t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\cos t)^n \sin t\times(\sin t)\mathrm{d}t \\
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(\cos t)^n(\sin t)^2\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(\cos t)^n(1-\cos t)^2\mathrm{d}t \\
W_{n+2} &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2}\mathrm{d}t\right) = (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

d'où on tire $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,W_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$.

3. On en déduit :

$$W_2 = \frac{0+1}{0+2}\,W_0 = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad W_3 = \frac{1+1}{1+2}\,W_1 = \frac{2}{3} \qquad\qquad W_4 = \frac{2+1}{2+2}\,W_2 = \frac{3\pi}{16}$$