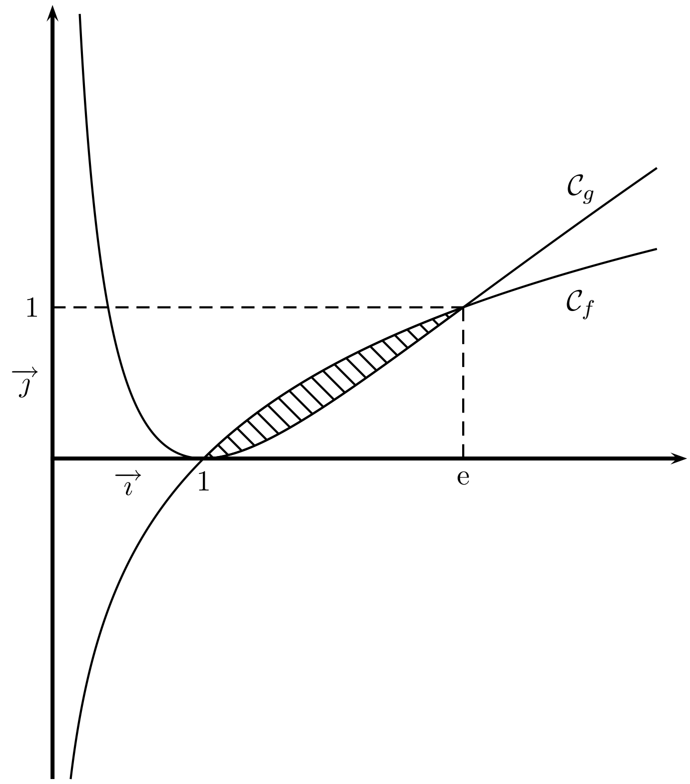
Devoir de Mathématiques n°8

Exercice 1

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.

2 points 1. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

2 points 2. Démontrer à l'aide d'une *intégration par parties* que $J = \mathrm{e} - 2I$.

0,5 point 3. En déduire J.

1 point 4. Donner la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 2

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\mathrm{d}x \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

1 point 1. Calculer I_0.

2 points 2. Démontrer par *intégration par parties* que $I_{n+1} = (n+1)I_n - \dfrac{1}{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1,5 point 3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et I_2.

Bonus 4. Déterminer la limite de la suite (I_n).