# Variables aléatoires

## 1 Notion de Variable Aléatoire

**Définition 1.** *Étant donné un univers fini $\Omega$, on appelle* variable aléatoire *$X$ sur $\Omega$ toute fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.*

**Exemple 1.** *Somme des numéros lors d'un lancer de deux dés cubiques.*

**Définition 2.** *Soit $X$ une variable aléatoire sur un univers fini $\Omega = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ muni d'une loi de probabilité $P$. On note $\Omega' = \{y_1, y_2, \dots y_m\}$ l'ensemble des valeurs prise par la variable aléatoire $X$ et $(X = y_k)$ l'événement de $\Omega$ constitué des éventualités ayant $y_k$ pour image par la variable aléatoire $X$.*

*La loi de probabilité sur $\Omega'$ définie en associant aux $y_k$ les probabilités $P(X = y_k)$ est appelée* loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**Remarque 1.** *On a $m \leqslant n$.*

**Exemple 2.** *Loi de probabilité de la somme des numéros lors d'un lancer de deux dés cubiques équilibrés.*

**Définition 3.** *Soit $X$ une variable aléatoire sur un univers fini $\Omega$ muni d'une loi de probabilité $P$ et prenant les valeurs $\{y_1, y_2, \dots y_m\}$.*

*On appelle* espérance *de la variable aléatoire $X$ le réel :*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=m} y_k P(X = y_k) = y_1 P(X = y_1) + \cdots + y_m P(X = y_m)$$

*On appelle* variance *de la variable aléatoire $X$ le réel :*

$$V(X) = \sum_{k=1}^{k=m} (y_k - E(X))^2 P(X = y_k) = (y_1 - E(X))^2 P(X = y_1) + \cdots + (y_m - E(X))^2 P(X = y_m)$$

*On appelle* écart-type *de la variable aléatoire $X$ le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

**Remarque 2.** *Ces définitions sont cohérentes avec les Statistiques car $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=m} P(X = y_k) = 1$.*

**Exemple 3.** *Calcul de l'espérance de la variance et de l'écart-type de la somme des numéros lors d'un lancer de deux dés cubiques équilibrés.*

## 2 Loi de Bernoulli - Loi Binomiale

### 2.1 Loi de Bernoulli

**Définition 4.** *On appelle* épreuve de Bernoulli *de paramètre $p$ une expérience aléatoire possédant deux issues appelées "succès" et "échec" de probabilités $p$ et $q = 1 - p$.*

**Exemple 4.** *Lancer d'une pièce truquée : $\Omega = \{Pile, Face\}$ et $P(Pile) = p = \dfrac{2}{3}$.*

**Définition 5.** *On appelle* loi de Bernoulli *de paramètre $p$ la loi de probabilité de la variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ dont la valeur est $1$ si l'issue est "succès" et $0$ si l'issue est "échec".*

**Propriété 1.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$, alors :*

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = pq = p(1 - p)$$

*Démonstration.* au programme. □

### 2.2 Loi Binomiale

**Définition 6.** *On appelle* factorielle *d'un entier naturel $n$ le produit des nombres naturels de 1 jusqu'à $n$, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et par convention $0! = 1$.*

**Exemple 5.** *Calcul du nombre de "mots" formés un utilisant une fois et une seule chacune des lettres a, b, c et d.*

**Définition 7.** *Étant donné un ensemble $E$ contenant $n$ éléments, on note $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et on lit "k parmi n" le nombre de sous-ensembles de $E$ contenant $k$ éléments. On convient de plus que $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.*

**Exemple 6.** *Calcul du nombre de mains de trois cartes dans un jeu de 32 cartes.*

**Propriété 2.** *Soient $n$ et $k$ deux entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors :*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*Démonstration.* au programme. □

**Propriété 3.** *Soient $n$ et $k$ deux entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors :*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \qquad et \qquad \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* au programme. □

**Théorème 1.** *Formule du binôme*
*Pour tous nombres réels $a$ et $b$ et tout nombre entier naturel $n$ non nul, on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k = a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} a^2b^{n-2} + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ab^{n-1} + b^n$$

*Démonstration.* au programme. □

**Corollaire 1.** *Pour tout nombre entier naturel $n$ non nul, on a :*

$$\sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$$

*Démonstration.* au programme. □

**Définition 8.** *On appelle* schéma de Bernoulli *de paramètres $n$ et $p$ l'expérience aléatoire consistant à répéter $n$ fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$.*

**Définition 9.** *On appelle* loi binomiale *de paramètres $n$ et $p$ la loi de probabilité de la variable aléatoire associée à un schéma de de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ dont la valeur est le nombre de succès obtenus.*

**Exemple 7.** *Calcul de l'espérance du nombre total de Pile obtenus lors de trois lancers successifs d'une pièce truquée : $\Omega = \{Pile, Face\}$ et $P(Pile) = p = \dfrac{2}{3}$.*

**Propriété 4.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, alors :*

$$P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad E(X) = np \quad et \quad V(X) = npq = np(1-p)$$

*Démonstration.* admis. □

**Exemple 8.** *Calcul de la probabilité d'obtenir 45 fois Pile lors de 100 lancers successifs d'une pièce truquée : $\Omega = \{Pile, Face\}$ et $P(Pile) = p = \dfrac{2}{3}$.*

# 3 Lois continues

On considère dans cette partie des variables aléatoires prenant une infinité de valeurs, l'univers $\Omega$ considéré étant lui aussi infini.

## 3.1 Notion de densité de probabilité

**Définition 10.** *Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a$ un réel, on appelle :*

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *la limite lorsqu'elle existe de* $\displaystyle\int_a^{M} f(x)\mathrm{d}x$ *pour* $M \to +\infty$,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ *la limite lorsqu'elle existe de* $\displaystyle\int_M^{a} f(x)\mathrm{d}x$ *pour* $M \to -\infty$,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *la somme lorsqu'elles existent des intégrales* $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

**Exemple 9.** *Calcul de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ $(\lambda > 0)$.

On admet pour la définition suivante que la notion d'intégrale se généralise au cas des fonctions continues sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs.

**Définition 11.** *On appelle* densité de probabilité *une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs et telle que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

**Exemple 10.** $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & si\ \ x \geqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$ $(\lambda > 0)$

**Définition 12.** *Soit $f$ une densité de probabilité, on appelle* fonction de répartition associée à *la densité de probabilité $f$ la fonction* $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

**Exemple 11.** *Calcul de la fonction de répartition associée aux densités de probabilité de l'exemple précédent.*

## 3.2 Loi uniforme sur $[0;1]$

**Définition 13.** *On dit que la variable aléatoire $X$ suit la* loi uniforme *sur l'intervalle $[0;1]$ si pour tous réels $a$ et $b$ on a :*

$$P(X \text{ à valeurs dans } [a;b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exemple 12.** *Probabilité de tirer un réel au hasard dans l'intervalle $[0;1]$, probabilité de tirer un réel au hasard dans l'intervalle $[a;b]$.*

## 3.3 Loi exponentielle

**Définition 14.** *On dit que la variable aléatoire $X$ suit la* loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ *si pour tous réels $a$ et $b$ on a :*

$$P(X \text{ à valeurs dans } [a;b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad f(x) = \begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & si\ \ x \geqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exemple 13.** *Probabilité de durée de vie sans vieillissement.*