Devoir maison n°7

Exercice 1

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{E}_1)$; $p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{O}_2)$; $p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   (a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   (b) Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   (c) Calculer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux lorsque le groupe comprend 10 personnes.

Exercice 2

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique.
On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est :

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\ ;\ 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.
   (b) En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.