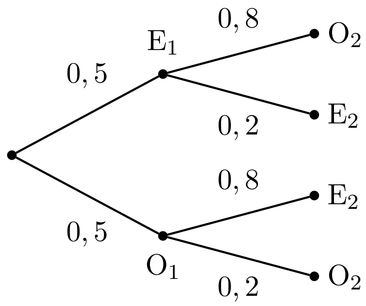
Correction du devoir maison n°7

Exercice 1

Partie A

1.



2. On a $p(\mathrm{E}_1) = 0,5$; $p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{O}_2) = 0,8$; $p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.
3. La probabilité cherchée est $p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) + p(\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2) = 0,1 + 0,5 \times 0,2 = 0,1 + 0,1 = 0,2$.

Partie B

1. On a ici une épreuve de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,5 = \dfrac{1}{2}$. La probabilité que k touristes partent à l'Est est donc $\dbinom{n}{k} 0,5^k \times (1-0,5)^{n-k} = \dbinom{n}{k} 0,5^n$.
2. (a) Étant donné qu'il y a au moins 3 touristes et qu'il n'y a que 2 plages, il y a obligatoirement au moins deux touristes sur une même plage donc il ne peut pas y avoir deux touristes heureux.

   (b) Il ne peut y avoir un touriste heureux que dans deux cas :
   – un seul est parti à l'Est et les autres $(n-1)$ vers l'Ouest ;
   – un seul est parti vers l'Ouest et les autres $(n-1)$ vers l'Est.
   On a donc :
   $$p = \binom{n}{1} 0,5 \times 0,5^{n-1} + \binom{n}{n-1} 0,5^{n-1} \times 0,5 = n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

   (c) La probabilité qu'il y ait un touriste heureux parmi 10 touristes est :
   $\dfrac{10}{2^9} = \dfrac{10}{512} \simeq 0,0195$ soit $0,02$ au centième près (1 chance sur 50).

Exercice 2

1. On a donc :

$$0,5 = \int_0^{200} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{200} = -\mathrm{e}^{-200\lambda} + 1$$

   et :

$$\mathrm{e}^{-200\lambda} = 0,5 \iff -200\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{200}$$

2. La probabilité cherchée est :

$$1 - \int_0^{300} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{300} = \mathrm{e}^{-300\lambda} = \mathrm{e}^{-\frac{300\ln 2}{200}} = e^{-\frac{3\ln 2}{2}} \simeq 0,353$$

   soit $0,35$ à 10^{-2} près par défaut.

3. (a) Pour calculer l'intégrale on pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{array}$$

   Les fonctions $u,\ u',\ v,\ v'$ étant continues, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^A - \int_0^A -\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^A \\ &= -A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda} \end{aligned}$$

   (b) Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$ (car $\lambda > 0$) et que $\lim\limits_{A\to+\infty} A\mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$

   Donc $d_m = \dfrac{200}{\ln 2} \simeq 289$ semaines à une semaine près.