Correction du devoir de Mathématiques n°9

Exercice 1

1. Si $p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique de raison r, alors $p_2 = p_1 + r,\ p_3 = p_1 + 2r$ et $p_4 = p_1 + 3r$. On a donc :

$$\begin{cases} p_4 & = & p_1 + 3r = 0,4 \\ p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 + 3r & = & 0,4 \\ 4p_1 + 6r & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 & = & 0,1 \\ r & = & 0,1 \end{cases}$$

On en déduit que $p_1 = 0,1,\ p_2 = 0,2,\ p_3 = 0,3,\ p_4 = 0,4$.

2. (a) La probabilité d'obtenir dans l'ordre 1, 2, 4 est $p_{124} = p_1 \times p_2 \times p_4 = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$.

   (b) La probabilité d'obtenir trois nombres distincts dans l'ordre croissant est $p_{123} + p_{124} + p_{134} + p_{234} = p_1 \times p_2 \times p_3 + p_1 \times p_2 \times p_4 + p_1 \times p_3 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 = 0,006 + 0,008 + 0,012 + 0,024 = 0,05$.

3. (a) On a un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et $p_4 = 0,4$. On sait que la probabilité d'obtenir i fois le chiffre 4 est (pour $0 \leqslant i \leqslant 10$) :

$$p(X = i) = \binom{10}{i} 0,4^i(1 - 0,4)^{10-i} = \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i}.$$

   (b) On a $\mathrm{E}(X) = n \times p = 10 \times 0,4 = 4$.
   Cela signifie que sur un grand nombre de tirages le 4 sortira en moyenne 4 fois sur 10.

   (c) On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$. Or $p(X = 0) = 0,6^{10}$.
   Donc $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^{10} \simeq 0,994$, soit à peu près 994 chances sur 1 000 d'obtenir au moins une fois le 4 en 10 tirages.

Exercice 2

A- 1. La probabilité $P(X \leqslant 1)$ s'interprète comme étant l'aire sous la courbe de la densité comprise entre les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

2. Comme la densité de la variable aléatoire X est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, alors $f(0) = \lambda$. Sur le graphique, le paramètre λ est donc l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse 0.

B- 1. $P(X \leqslant 1) = \displaystyle\int_0^1 1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1{,}5\times 1} - (-1) = 1 - \mathrm{e}^{-1{,}5} \simeq 0,777$.

2. $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1{,}5\times 2} = \mathrm{e}^{-3}$.

3. Comme $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = P(X \leqslant 2) - P(X \leqslant 1)$, alors $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \mathrm{e}^{-1{,}5} - \mathrm{e}^{-3} \simeq 0{,}173$.

4. Calculons l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1{,}5t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\ \mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5t} & u(t) = -\mathrm{e}^{-1{,}5t} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}$$

Donc

$$F(x) = \left[-t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\right]_0^x - \int_0^x -\mathrm{e}^{-1{,}5t}\ \mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\right]_0^x - \left[\frac{1}{1,5}\mathrm{e}^{-1{,}5t}\right]_0^x = -x\mathrm{e}^{-1{,}5x} - \frac{1}{1,5}\mathrm{e}^{-1{,}5x} + \frac{1}{1,5}$$

Mais $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $E(X) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$.