Géométrie dans l'Espace

1 Caractérisation barycentrique d'une droite et d'un plan de l'Espace

Propriété 1. *Soient A et B deux points distincts de l'Espace, alors :*

1. *Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et $M = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.*
2. *Le point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si il existe deux réels α et β positifs ou nuls tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et $M = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.*

Démonstration. au programme. □

Propriété 2. *Soient A, B et C trois points non alignés de l'Espace, alors :*

1. *Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe trois réels α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $M = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.*
2. *Le point M appartient au triangle « plein » ABC si et seulement si il existe trois réels α, β et γ positifs ou nuls tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $M = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.*

Démonstration. au programme. □

2 Représentation paramétrique d'une droite de l'Espace

L'Espace est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Propriété 3. *Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'Espace, alors le point $M(x;y;z)$ appartient à la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si il existe un réel k tel que :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_A + k\alpha \\ y &=& y_A + k\beta \\ z &=& z_A + k\gamma \end{array}\right.$$

Démonstration. au programme. □

3 Produit scalaire

Définition 1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du Plan ou de l'Espace, on appelle* produit scalaire *des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Remarque 1. $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$

Définition 2. *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du Plan ou de l'Espace sont dits* orthogonaux *si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.*

Propriété 4. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du Plan ou de l'Espace alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos[(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})]$.*

Démonstration. au programme. □

Propriété 5. *Le Plan et l'Espace sont munis d'un repère orthonormé.*

(1) *Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs du Plan, alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

(2) *Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs de l'Espace, alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 6. *Soient* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *trois vecteurs du Plan ou de l'Espace et* k *un nombre réel, alors :*

(1) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

(2) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

(3) $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

Démonstration. au programme. □

Exemple 1. *Calcul de* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$.

4 Équation cartésienne d'une droite du Plan et d'un plan de l'Espace

4.1 Équation cartésienne d'une droite du Plan.

Le Plan est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 7. *Toute droite* $\mathcal{D}$ *du Plan admet une équation de la forme* $ax + by + c = 0$ *avec* a *et* b *non nuls simultanément, cette équation est appelée une* équation cartésienne *de la droite* $\mathcal{D}$, *le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est appelé un* vecteur normal *à la droite* $\mathcal{D}$.

Démonstration. au programme en posant $\overrightarrow{n}$ un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en un point H puis en calculant $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$. □

Remarque 2. *Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne.*

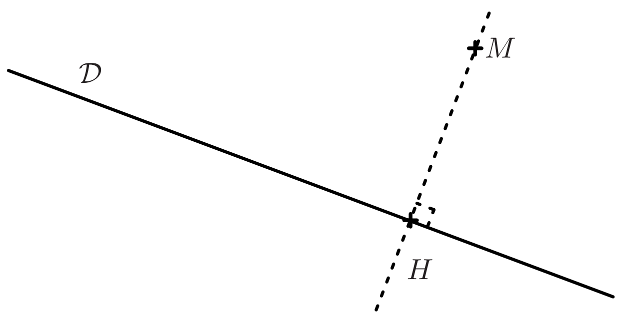
Propriété 8. *Soient* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *deux droites du Plan d'équations respectives* $ax+by+c = 0$ *et* $a'x+b'y+c' = 0$, *alors :*

(1) *Les droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont parallèles si et seulement si* $ab' - a'b = 0$.

(2) *Les droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont perpendiculaires si et seulement si* $aa' + bb' = 0$.

Démonstration. au programme. □

Définition 3. *Soient* $\mathcal{D}$ *une droite et* M *un point du Plan, on appelle* projeté orthogonal *du point* M *sur la droite* $\mathcal{D}$ *le point* H *intersection de la droite* $\mathcal{D}$ *avec la droite perpendiculaire à* $\mathcal{D}$ *passant par* M. *On appelle* distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ *le réel* $\mathrm{d}(M;\mathcal{D}) = HM$.



Propriété 9. *Soient $M(x_M;y_M)$ un point du Plan et $\mathcal{D}$ une droite du Plan d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, alors :*

$$\mathrm{d}(M;\mathcal{D}) = \frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$. □

Propriété 10. *Une droite $\mathcal{D}$ du Plan d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ partage le Plan en deux demi-plans de frontière $\mathcal{D}$ d'équations $ax+by+c>0$ et $ax+by+c<0$.*

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$. □

4.2 Équation cartésienne d'un plan de l'Espace.

L'Espace est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 11. *Toute plan $\mathcal{P}$ de l'Espace admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non nuls simultanément, cette équation est appelée une* équation cartésienne *du plan $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est appelé un* vecteur normal *au plan $\mathcal{P}$.*

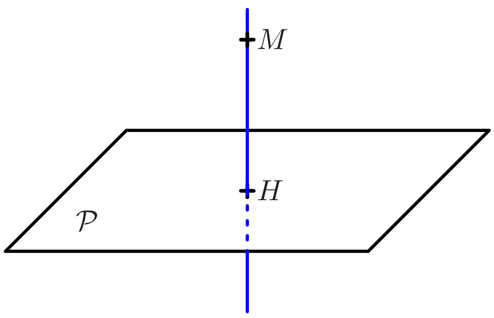
Démonstration. au programme en posant $\overrightarrow{n}$ un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en un point H puis en calculant $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$. □

Remarque 3. *Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne.*

Propriété 12. *Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'Espace d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'+cc'=0$.*

Démonstration. au programme. □

Définition 4. *Soient $\mathcal{P}$ un plan et M un point de l'Espace, on appelle* projeté orthogonal *du point M sur le plan $\mathcal{P}$ le point H intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M. On appelle* distance du point M au plan $\mathcal{P}$ *le réel* $\mathrm{d}(M;\mathcal{P}) = HM$.



Propriété 13. *Soient $M(x_M;y_M;z_M)$ un point de l'Espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'Espace d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors :*

$$\mathrm{d}(M;\mathcal{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$. □

Propriété 14. *Un plan $\mathcal{P}$ de l'Espace d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ partage l'Espace en deux demi-espaces de frontière $\mathcal{P}$ d'équations $ax+by+cz+d>0$ et $ax+by+cz+d<0$.*

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$. □