

Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série scientifique (S)
Lycée Robert Garnier - février 2009

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7 (enseignement obligatoire)

Coefficient 9 (enseignement de spécialité)

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants les uns des autres. Les trois premiers exercices sont communs à tous les candidats, l'exercice 4 diffère selon l'enseignement choisi (obligatoire ou de spécialité).

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (8 points)

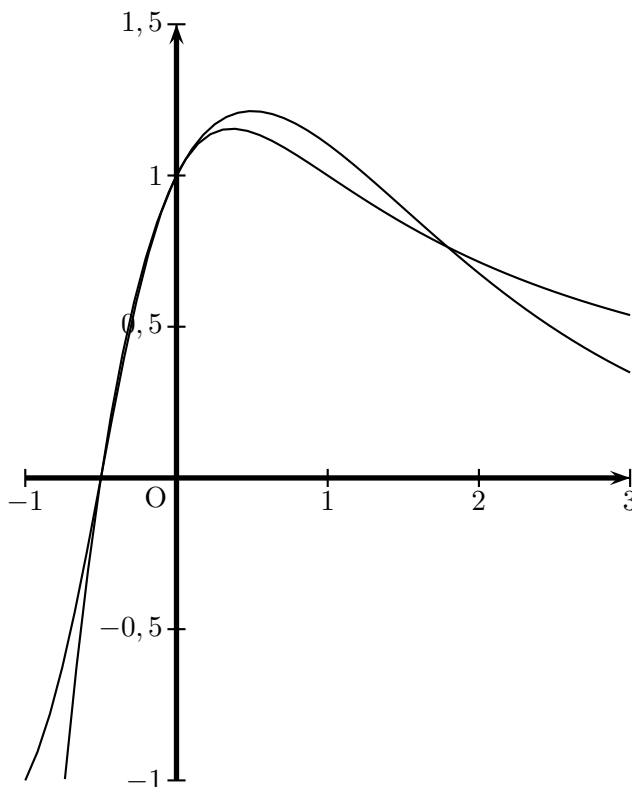
Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

- (a) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$, déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
(b) Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur \mathbb{R} .
- Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} , dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α .
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
- En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur \mathbb{R} et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g .



Les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) sont notées \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

- Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
- Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
- À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur \mathbb{R} .
- En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 2 (4 points)

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} vérifiant la condition :

$$(C) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) & = & 1 \\ f(0) & = & -4 \end{cases} \quad \text{pour tout nombre réel } x,$$

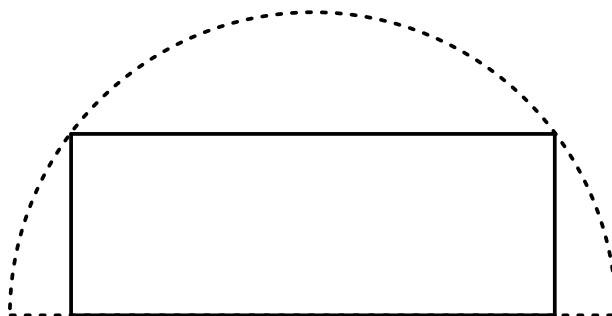
(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

- On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(-x)f(x)$.
 - Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
 - Calculer la fonction dérivée de la fonction g .
 - En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
 - Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$.
- Question de cours**
 - On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur \mathbb{R} , de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque
 - Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
- Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice 3 (3 points)

Dans cet exercice, les éventuelles réponses partielles ainsi que les tentatives infructueuses seront valorisées et devront donc être portées sur la copie.

On considère un rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon 1 (figure ci-dessous).



Déterminer les dimensions ainsi que l'aire du rectangle d'aire maximum.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire) (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ; unité graphique 2cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z - 1}{z + 1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

- Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
- Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 , $(z' - 1)(z + 1) = -2$.
 - En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1 .
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
- Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
- Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
 - Déterminer le module et un argument de $(p + 1)$.
 - Montrer que le point P appartient au cercle (C).
 - Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où \bar{p} est le conjugué de p .
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
 - En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .

Exercice 4 (Enseignement de spécialité) (5 points)

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

- On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
 - Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.
 - Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.
 - En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$.
Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
 - Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
- Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans \mathbb{N} , l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
 - Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

- En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.