Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série scientifique (S)
Lycée Robert Garnier - février 2009

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7 (enseignement obligatoire)
Coefficient 9 (enseignement de spécialité)

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants les uns des autres. Les trois premiers exercices sont communs à tous les candidats, l'exercice 4 diffère selon l'enseignement choisi (obligatoire ou de spécialité).

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (8 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1$.

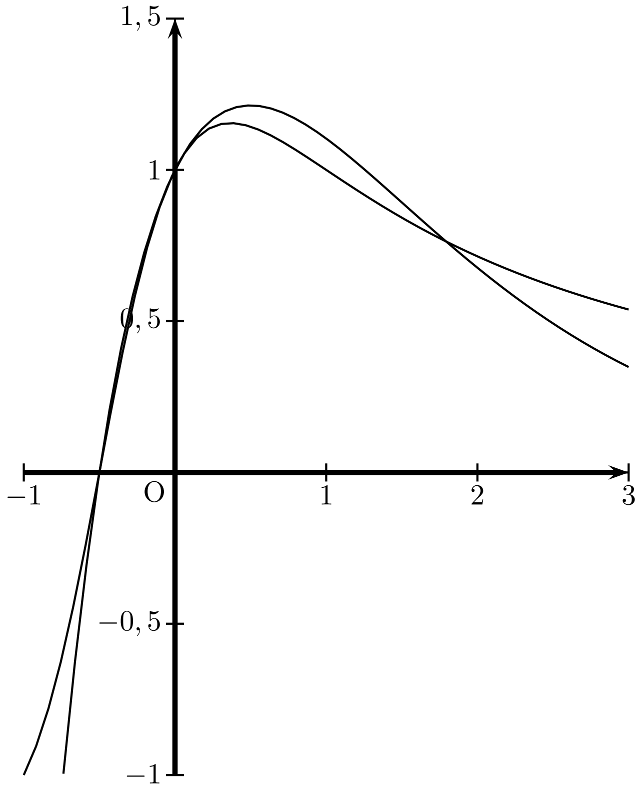
1. (a) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$, déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (b) Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.

   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.



Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admettent en ce point la même tangente.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
3. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 2 (4 points)

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{array}{lcll} f(-x)f'(x) & = & 1 & \text{pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 & \end{array} \right.$$

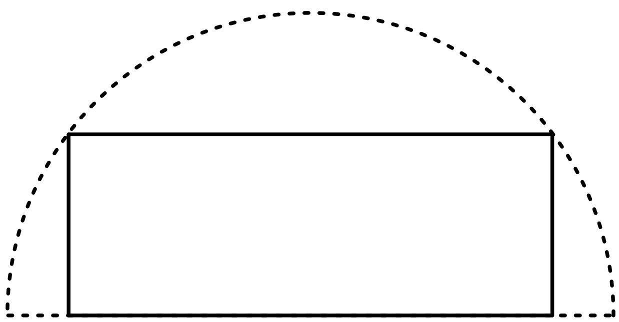
(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.
   (a) Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
   (c) En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
   (d) Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$.
2. **Question de cours**
   (a) On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque
   (b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice 3 (3 points)

Dans cet exercice, les éventuelles réponses partielles ainsi que les tentatives infructueuses seront valorisées et devront donc être portées sur la copie.

On considère un rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon 1 (figure ci-dessous).



Déterminer les dimensions ainsi que l'aire du rectangle d'aire maximum.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire) (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; unité graphique 2cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.
   (b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C′) de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer le module et un argument de $(p+1)$.
   (b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).
   (c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés.
   (d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P′ du point P par l'application f.

Exercice 4 (Enseignement de spécialité) (5 points)

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
   (a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.
   (b) Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
   Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.
   (c) En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$.
   Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
   (d) Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
2. (a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
   En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
   (b) Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

   $$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
   (c) En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.