Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série scientifique (S)
Lycée Robert Garnier - mai 2009

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7 (enseignement obligatoire)
Coefficient 9 (enseignement de spécialité)

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants les uns des autres. Les trois premiers exercices sont communs à tous les candidats, l'exercice 4 diffère selon l'enseignement choisi (obligatoire ou de spécialité).

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points + 1 point hors-barème)

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ au moyen d'une *Intégration Par Parties.*

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   (a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   (c) Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-t-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
   Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Exercice 2 (5 points + 1 point hors-barème)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2}z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?
4. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \text{i}$.
   En déduire la nature du triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 3 (5 points + 1 point hors-barème)

On note $p_{\text{A}}(\text{B})$ *la probabilité conditionnelle de l'événement* B *sachant que l'événement* A *est réalisé.*

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note A_0 l'événement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
   On note A_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
   On note A_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires ».
   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note B_0 l'événement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »
   (a) Calculer $p_{\text{A}_0}(\text{B}_0)$, $p_{\text{A}_1}(\text{B}_0)$ et $p_{\text{A}_2}(\text{B}_0)$.
   (b) En déduire $p(\text{B}_0)$.
   (c) Calculer $p(\text{B}_1)$ et $p(\text{B}_2)$.
   (d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne ».
   Montrer que $p(\text{R}) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire) (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z - 2\mathrm{i})\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0.$$

Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier).

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.
À tout complexe z différent de z_{A} on associe le complexe :

$$z' = \frac{z - 2\mathrm{i}}{z - 1 - \mathrm{i}}$$

   (a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   Montrer que $\mathrm{B} \in (E)$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E).

   (b) Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
   Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   (a) Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

   (b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

Exercice 4 (Enseignement de spécialité) (5 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan $(x\mathrm{O}y)$.
2. On appelle (D) la droite passant par les points $A(3\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

   (a) Démontrer que le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite (D) si et seulement si il existe un réel k tel que : $\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 1 \\ z = 1 - 4k \end{cases}$

   (b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. (a) On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

   (b) M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\mathrm{ppcm}(a\ ;\ b) = 440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système :

   $(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4\ 625 \\ \mathrm{ppcm}(a\ ;\ b) = 440 \end{cases}$

   Montrer que si $(a,\ b)$ est solution de (1) alors $\mathrm{pgcd}(a\ ;\ b)$ est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche (même incomplete) ou d'initiative (même non fructueuse) sera prise en compte dans l'évaluation.