Correction Bac Blanc - Série S - Lycée Robert Garnier mai 2009

Exercice 1

Partie A

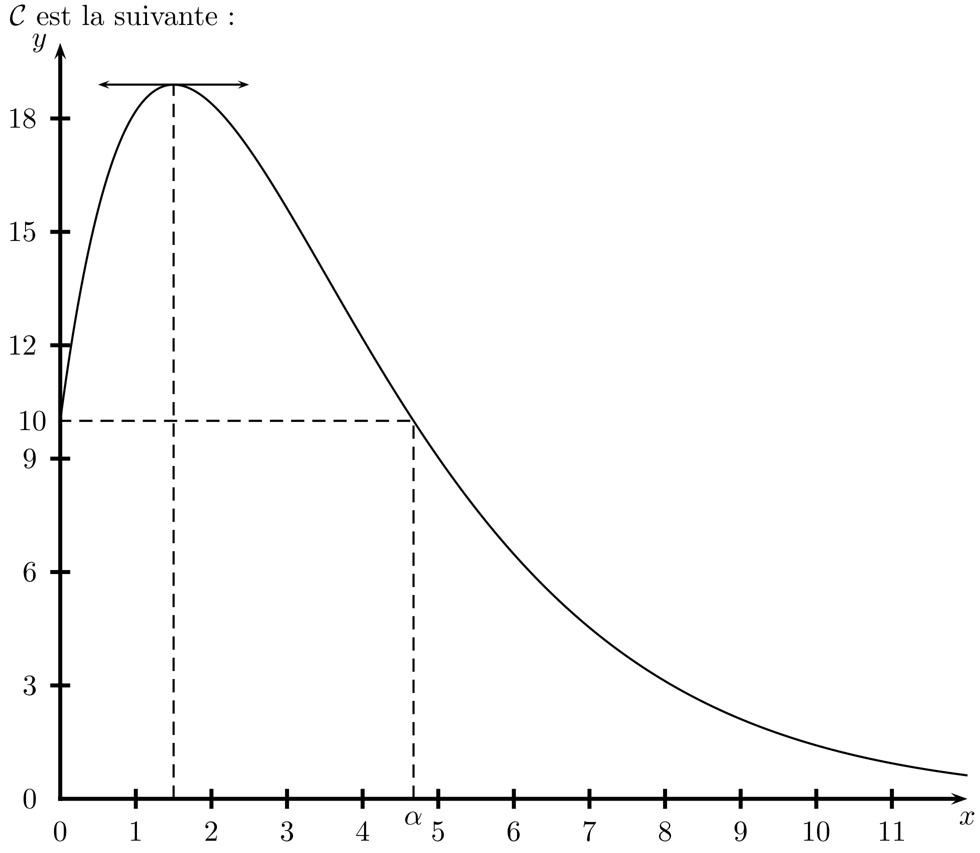
1. En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on a $f(x) = (40X + 10)\mathrm{e}^{-X} = 40\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} + \dfrac{10}{\mathrm{e}^X}$. La limite de ces deux termes en plus l'infini est nulle donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = (20 - 10x - 5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ qui est du signe de $(15 - 10x)$ car $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Cette dérivée s'annule en $\dfrac{3}{2}$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$3/2$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$			
f	10	$\nearrow$	$40\mathrm{e}^{-3/4}$	$\searrow$	10	$\searrow$	0

3. Sur $]0\ ;\ 3/2]$, $f(x) > 10$, donc l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution ; sur l'intervalle $]3/2\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable, monotone décroissante de $40\mathrm{e}^{-3/4} \approx 18,9$ à 0. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]3/2\ ;\ +\infty[$ tel que $f(x) = 10$. La calculatrice donne $\alpha \simeq 4,673$.

4. La courbe $\mathcal{C}$ est la suivante :



5. On intègre I par parties, en posant : $\begin{cases} u(x) = 20x + 10 & v'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \\ u'(x) = 20 & v(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

   On a :

   $$I = \left[-2(20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \int_0^3 40\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x = \left[-2(20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 - \left[80\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 = \left[(-40x-100)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3$$

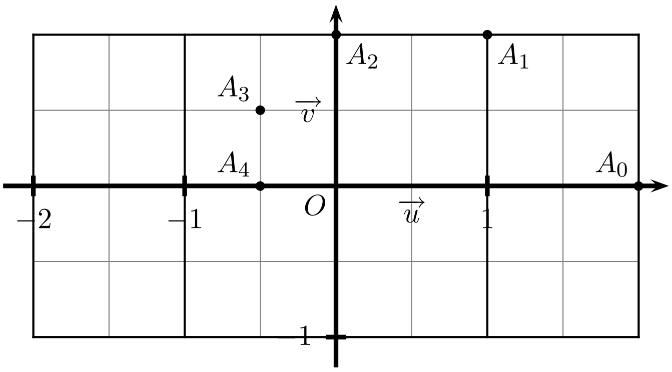
   $$\mathrm{I} = 100 - 220\mathrm{e}^{-3/2} \simeq 50,91 \text{ (u.a.)}$$

Partie B

1. On a effectivement $f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = (15-10t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + (10t+5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Donc f est une solution de (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Par définition on a $g'(t) + \dfrac{1}{2}g(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $g(0) = 10$. On vient de voir que $f(t) + \dfrac{1}{2}f'(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ d'où par différence de ces deux équations : $g' - f' + \dfrac{g}{2} - \dfrac{f}{2} = 0 \iff (g-f)' + \dfrac{1}{2}(g-f) = 0$.
   Conclusion : la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle : $(\mathrm{E}')\ y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   (b) Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions $t \longmapsto K\mathrm{e}^{-t/2}$.
   (c) La fonction $(g-f)$ est l'une de ces solutions. Or $(g-f)(0) = g(0) - f(0) = K = 10 - 10 = 0$. La fonction $g - f$ est donc la fonction nulle.
   Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant $y'(0) = 10$, c'est la fonction f de la **partie A**.
3. D'après la question **3.** de la partie A, cela correspond à la valeur α telle que $f(\alpha) = 10$. On a vu que $\alpha \simeq 4,673\text{h} = 4$ h 40min.
4. $\theta = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{100-220\mathrm{e}^{-3/2}}{3} \simeq 17$ (degrés).

Exercice 2

1. $z_0 = 2,\ z_1 = 1 + \mathrm{i},\ z_2 = \mathrm{i},\ z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2},\ z_4 = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.



2. On a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$.
   L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a $u_0 = |z_0| = |2| = 2$ et donc $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
3. On a $OA_n = |z_n| = u_n$, donc A_n appartient au disque (fermé) de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n \leqslant 0,1 \iff 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0,1 \iff 20 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n \iff 20 \leqslant 2^{\frac{n}{2}} \iff \dfrac{n}{2}\ln 2 \geqslant \ln 20 \iff n \geqslant \dfrac{2\ln 20}{\ln 2} \simeq 8,6$.
   La condition sera donc réalisée la première fois par u_9 et donc $n_0 = 9$.
   La calculatrice donne $u_8 = 0,125$ et $u_9 \simeq 0,084 < 0,1$.

4. (a) Pour tout naturel n, $u_n \neq 0$ donc $z_n \neq 0$. On peut donc écrire $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n - z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n} = \dfrac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.

L'interprétation géométrique de cette égalité est :

– $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}},\ \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : pour tout naturel n le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

– En modules l'égalité donne $\dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1 \iff A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$. Conclusion le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.

Finalement pour tout naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1}, comme on peut le voir sur les quatre premiers triangles de la figure qui précède.

(b) Comme les triangles sont isocèles $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Cette somme est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = \sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a donc $\ell_n = \sqrt{2}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^n - 1\right)}{\sqrt{2}^{n-1}(\sqrt{2}-1)}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}^n - 1}{\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1)$.

Exercice 3

1. L'urne contient 6 boules et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc $\dbinom{6}{2} = 15$.

• Pour réaliser l'événement A_0 il faut tirer 2 boules rouges parmi 4 : le nombre de cas favorables est donc $\dbinom{4}{2} = 6$. On en déduit que $p(\mathrm{A}_0) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

• Pour réaliser l'événement A_1 il faut tirer 1 boule rouge parmi 4 et une boule noire parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 4×2. On en déduit que $p(\mathrm{A}_1) = \dfrac{4\times 2}{15} = \dfrac{8}{15}$.

• Pour réaliser l'événement A_2 il faut tirer 2 boules noires parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 1. On en déduit que $p(\mathrm{A}_2) = \dfrac{1}{15}$.

2. (a) Il reste 4 boules dans l'urne et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc $\dbinom{4}{2} = 6$.

• A_0 étant réalisé, il reste dans l'urne 2 boules rouges et 2 boules noires. Pour réaliser B_0 il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc un cas favorable.

La probabilité $p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0) = \dfrac{1}{6}$.

• A_1 étant réalisé, il reste dans l'urne 3 boules rouges et 1 boule noire. Pour réaliser B_0 il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc $\dbinom{3}{2} = 3$ cas favorables.

La probabilité $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

• A_2 étant réalisé, il reste dans l'urne 4 boules rouges. L'événement B_0 est donc certain. Donc $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0) = 1$.

(b) L'événement B_0 est la réunion des événements incompatibles $\mathrm{A}_0\cap\mathrm{B}_0$, $\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_0$ et $\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B}_0$. Par suite $p(\mathrm{B}_0)$ est la somme des probabilités de ces trois événements.

Or $p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_0) = p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0) \times p(\mathrm{A}_0) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{15}$.

$p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_0) = p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0) \times p(\mathrm{A}_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{15} = \dfrac{4}{15}$.

$p(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}_0) = p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_0) \times p(\mathrm{A}_2) = \dfrac{1}{15}$.
D'où $p(\mathrm{B}_0) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

(c) Des calculs analogues à ceux menés en **a.** et **b.** ci-dessus conduisent à calculer :
$p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_1) = \dfrac{2 \times 2}{6} = \dfrac{2}{3}$. D'où $p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$.
$p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1) = \dfrac{1 \times 3}{6} = \dfrac{1}{2}$. D'où $p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{15} = \dfrac{4}{15}$.
Extraire une boule noire au deuxième tirage quand les deux boules noires ont été extraites lors du premier tirage est impossible. Donc $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_1) = 0$.

D'où la valeur de $p(\mathrm{B}_1)$, somme des trois probabilités précédentes : $p(\mathrm{B}_1) = \dfrac{8}{15}$. De plus $p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2) = \dfrac{1}{6}$. D'où $p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_2) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{15}$.
Comme ci-dessus : $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_2) = 0$ et $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_2) = 0$.

D'où la valeur de $p(\mathrm{B}_2)$, somme des trois probabilités précédentes : $p(\mathrm{B}_2) = \dfrac{1}{15}$.

(d) On cherche à calculer $p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_1)$. Or d'après les calculs antérieurs $p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_1) = \dfrac{4}{15}$ et $p(\mathrm{B}_1) = \dfrac{8}{15}$.
Donc $p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_1) = \dfrac{1}{2}$.

3. L'événement R est réalisé lorsque l'un des événements incompatibles ci-dessous l'est :
« tirer une boule noire au premier tirage et une boule noire au second » soit réaliser l'évènement $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_1$ ou « ne tirer aucune boule noire au premier tirage et deux boules noires au second » soit réaliser l'événement $\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_2$.
Il en résulte que $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_1) + p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_2) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire)

1. $(z - 2\mathrm{i})\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0 \iff z - 2\mathrm{i} = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.
On résout les deux équations séparément. On trouve 3 solutions ($z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 - \mathrm{i}^2 = 0 \iff z - 1 + \mathrm{i} = 0$ ou $z - 1 - \mathrm{i} = 0$).

$z_0 = 2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
$z_1 = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
$z_2 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. (a) – $z'_B = \frac{2\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1-\mathrm{i}} = 0$. Or $0 = 0\mathrm{i}$ est bien un imaginaire pur, donc $B \in (E)$.
– Détermination de (E) :

$$\begin{aligned} z' \text{ imaginaire pur} &\iff \arg(z') = \tfrac{\pi}{2}(\pi) \\ &\iff \arg\left(\tfrac{z-z_\mathrm{B}}{z-z_\mathrm{A}}\right) = \tfrac{\pi}{2}(\pi) \\ &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = \tfrac{\pi}{2}(\pi) \\ &\iff AMB \text{ est un triangle rectangle en } B \end{aligned}$$

L'ensemble (E) est donc le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A (en effet, z'_A n'est pas défini).

(b)
$$\begin{aligned} |z'| = 1 &\iff \left|\tfrac{z-z_B}{z-z_A}\right| = 1 \\ &\iff |z - z_B| = |z - z_A| \\ &\iff BM = MA \end{aligned}$$

L'ensemble F est la médiatrice du segment $[AB]$.

3. (a) Écriture complexe de la rotation : $z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$
$z_{B'} = \mathrm{i}\left(2\mathrm{i} - \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{5}{2} = 2 + \mathrm{i}$.
Par un calcul similaire, on obtient $z_{I'} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$

(b) Pour cette question, il faut remarquer que I est le milieu de $[AB]$.
Ainsi, (E) est le cercle de centre I et de rayon IB. Son image par la rotation R est le cercle de centre I' et de rayon $I'B'$.
On remarque aussi que Ω est un point de la médiatrice de $[AB]$. (F) est la droite (ΩI).
L'image de Ω par R est Ω (le centre d'une rotation est un point fixe), donc l'image de (F) est la droite $(\Omega I')$.

Exercice 4 (Enseignement de spécialité)

1. Soit $M(x;y;z)$ appartenant à (S).
On a $x^2+y^2-(-z)^2 = x^2+y^2-z^2 = 1$ donc $M'(x;y;-z)$ appartient à (S), ainsi (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4;0;4)$ est un vecteur directeur de la droite (D).
ainsi $(D) : \begin{cases} x = -1-4t \\ y = 1 \\ z = 1+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $(-1-4t)^2+1^2-(1+4t)^2 = (1+4t)^2+1^2-(1+4t)^2 = 1$.
Par conséquent tout point de (D) appartient à (S), c'est-à-dire (D) est incluse dans (S).

3. Un plan parallèle au plan (xOy) a une équation de la forme $z=k$ avec k constante réelle.
On résout le système : $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ z=k \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1+k^2 \\ z=k \end{cases}$ or $1+k^2>0$, on reconnait donc l'équation du cercle de centre $\Omega(0;0;k)$ et de rayon $\sqrt{1+k^2}$ inclus dans le plan d'équation $z=k$.

4. (a) D'après ce qui précède, (C) est le cercle de centre $\Omega'(0;0;68)$ et de rayon $\sqrt{4\,625} = 5\sqrt{185}$ inclus dans le plan d'équation $z=68$.

   (b) Soit d=pgcd(a ; b), d divise a et b donc d^2 divise a^2 et b^2. On en déduit que d^2 divise $a^2+b^2 = 4625$.
Or 4625= $5^3 \times 37$ ainsi d^2 est égal à 1 ou 5^2 c'est-à-dire d égal 1 ou 5.

   – Supposons que $d=1$. On a alors ab =ppcm$(a;b)\times$pgcd$(a;b) = 440$.
Ainsi a^2+b^2+2ab =5 505 $\iff$ $(a+b)^2$ =5 505 or il n'existe pas d'entier dont le carré est égal à 5 505 ($\sqrt{5\,505}$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$), par conséquent $d \neq 1$.

   – Supposons que $d=5$. On a alors ab =ppcm$(a;b)\times$pgcd$(a;b)$ =2 200.
Ainsi a^2+b^2+2ab =9 025 $\iff$ $(a+b)^2$ =9 025 $\iff$ $a+b=95$ car $a+b>0$.
De même a^2+b^2-2ab =225 $\iff$ $(a-b)^2$ =225 $\iff$ $a-b=-15$ car $a-b<0$.
$\begin{cases} a+b=95 \\ a-b=-15 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=95 \\ 2a=80 \end{cases} \iff \begin{cases} a=40 \\ b=55 \end{cases}$
Or 40<55, $40^2+55^2=4625$ et ppcm(40 ;55)=$5\times 8\times 11 = 440$.
Ainsi il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a<b$ et ppcm(a ; b) $= 440$.