bac blanc 2009 - corrigé

Exercice 1

Partie A

1. (a) Pour $x < 0$, on a : $x^2 + x + 1 = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 + x + 1) = +\infty$$

De plus

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

On en déduit par produit :

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 + x + 1)e^{-x} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty}$$

Pour $x > 0$

$$(x^2 + x + 1)e^{-x} = x^2e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x + 1)e^{-x} = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -1}$$

(b) φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (2x + 1)e^{-x} + (x^2 + x + 1)\left(-e^{-x}\right)\\ &= \left(-x^2 + x\right)e^{-x}\end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x^2 + x$		-	0	$+$	0	-	
$\varphi'(x)$		-	0	$+$	0	-	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3e^{-1} - 1$	$\searrow$	-1

2. La fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $[0;1]$ et $\varphi(0)=0$. Donc φ s'annule une seule fois sur $]-\infty;1]$.pour $x=0$.
   Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, φ est continue et strictement décroissante.
   On a : $\left\{ \begin{array}{r} \varphi(1) = 4e^{-1} - 1 \approx 0,103 > 0 \\ \varphi(3) \approx -0,353 \end{array} \right.$
   D'après le théorème de la bijection, φ s'annule une unique fois sur $]1;+\infty[$, pour x dans $]1;3[$. On appelle α ce nombre réel.
   D'après la calculatrice, $1,79 < \alpha < 1,80$.
   En effet : $\varphi(1,79) \approx 0,0007 > 0$ et $\varphi(1,80) \approx -0,0016 < 0$.
3. On en déduit le tableau de signe de φ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	+	0	-	

Partie B

1. $f(0) = e^0 = 1$ et $g(0) = 1$, donc C_f et C_g passent toutes les deux par $A(0;1)$.
   Pour vérifier si les deux courbes ont la même tangente en ce point, il suffit de vérifier que leurs tangentes respectives ont le même coefficient directeur.
   Pour x dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x} + (2x+1)(-e^{-x}) \\ &= (1-2x)e^{-x} \end{aligned}$$
   Donc $f'(0) = e^0 = 1$
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$
   Donc $g'(0) = 1$
   Les tangentes à C_f et C_g en 0 passent toutes deux par $A(0,1)$ et ont pour coefficient directeur 1, elles sont donc confondues.
2. Pour x dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)e^{-x}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)e^{-x}(x^2+x+1) - (2x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\left[e^{-x}(x^2+x+1) - 1\right]}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$
3. Tableau de signe de φ

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	-	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x+1$		-	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		-	0	$+$	0	$+$	0	-	

4. On déduit du tableau précédent que C_f est au dessus de C_g sur l'intervalle $[-\frac{1}{2};\alpha]$, et que C_g est au dessus de C_f sur $]-\infty;-\frac{1}{2}]\cup[\alpha;+\infty[$.

◀

Exercice 2

1. (a) On suppose que f s'annule en un réel a.
   f vérifie (C), donc
   $$f(a)f'(-a)=1$$
   c'est en contradiction avec l'hypothèse formulée, $f(a)$ ne peut donc pas être nul.
   On en déduit que, pour tout x réel : $f(x)\neq 0$.

   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(-x)f(x)+f(-x)f'(x) \\ g'(x) &= -1+1\,;\ (\text{ D'après la condition } \textit{(C)}\ ) \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

   (c) g' est nulle sur $\mathbb{R}$, donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
   $$g(0)=f(0)f(0)=16$$
   Donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x)=16$

   (d) Pour $x\in\mathbb{R}$.
   $$f(-x)f(x)=16$$
   On sait que : $f(x)\neq 0$ *(Question 1.(a))*
   on en déduit :
   $$f(-x)=\frac{16}{f(x)}$$

   $$(C) \iff \left\{\begin{array}{l} f(0)=-4 \\ \\ \dfrac{16}{f(x)}f'(x)=1 \end{array}\right.$$
   $$(C) \iff \left\{\begin{array}{l} f(0)=-4 \\ \\ f'(x)=\dfrac{1}{16}f(x) \end{array}\right.$$

2. Question de cours

(a) Soit f une solution de : $(E) \qquad y' = \dfrac{1}{16}y$
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \longmapsto e^{-\frac{x}{16}}f(x)$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et pour x réel :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{16}e^{-\frac{x}{16}}f(x) + e^{-\frac{x}{16}}f'(x) \\ g'(x) &= -\frac{1}{16}e^{-\frac{x}{16}}f(x) + \frac{1}{16}e^{-\frac{x}{16}}f(x) \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$, il existe donc un réel K tel que, pour tout x :

$$\begin{aligned} g(x) &= K \\ e^{-\frac{x}{16}}f(x) &= K \\ f(x) &= Ke^{\frac{x}{16}} \end{aligned}$$

Réciproquement toute fonction de la forme $f_K(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
En effet :

$$\begin{aligned} f'_K(x) &= \frac{1}{16}e^{\frac{x}{16}} \\ f'_K(x) &= \frac{1}{16}f_K(x) \end{aligned}$$

(b) Soit f une fonction solution de (E), alors f est de la forme : $f_K(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$

$$\begin{aligned} f_k(0) = -4 &\iff Ke^0 = -4 \\ &\iff K = -4 \end{aligned}$$

Il existe donc une unique fonction f solution de (E) telle que $f(0) = -4$, c'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$$

3. Dans la partie 1, on a démontré que si f satisfait la condition (C), alors f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$.
Dans la partie 2, nous avons démontré que l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = -4$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$$

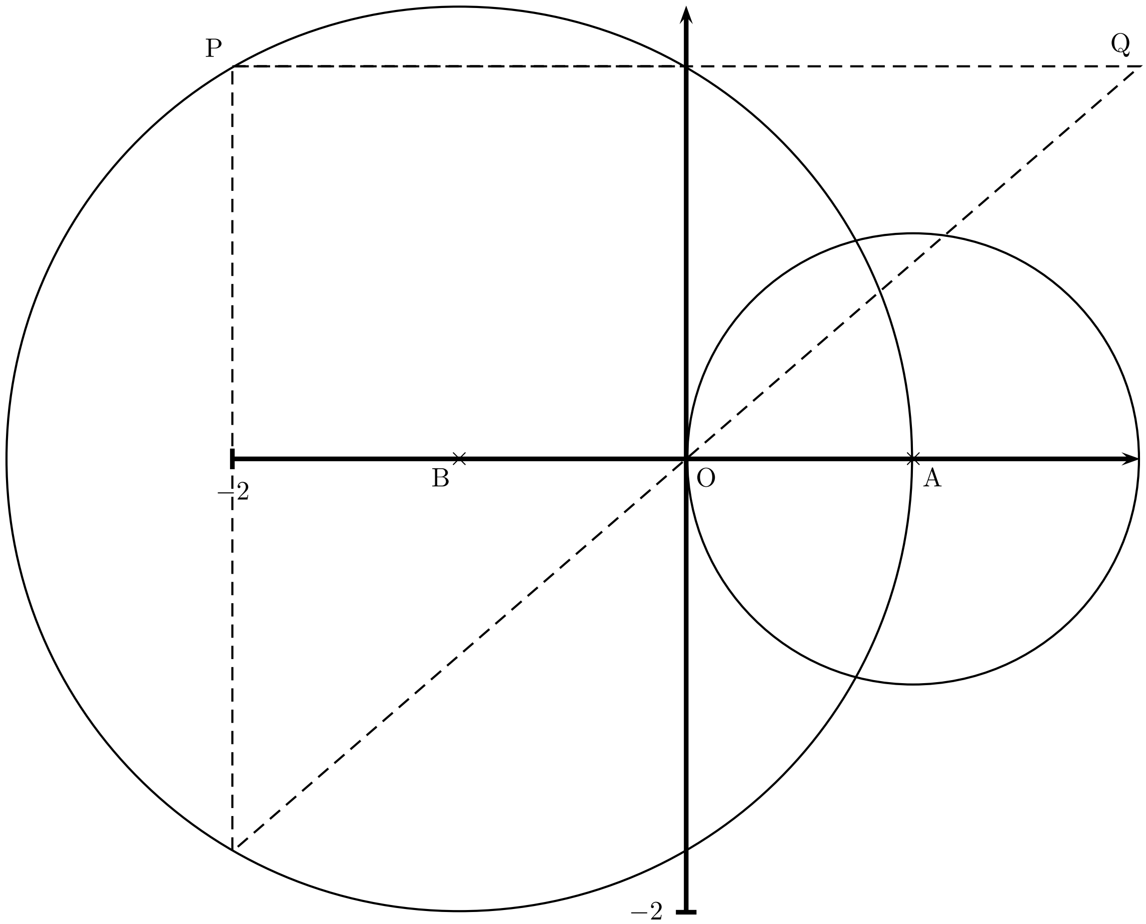
Réciproquement, vérifions que cette fonction vérifie bien la condition (C).
Pour x réel :

$$\begin{aligned} f(-x)f'(x) &= -4e^{\frac{-x}{16}} \times (-4)\frac{1}{16}e^{\frac{x}{16}} \\ f(-x)f'(x) &= (-4)(-4)\frac{1}{16} \times e^{\frac{-x}{16}}e^{\frac{x}{16}} \\ f(-x)f'(x) &= e^{\frac{-x}{16}+\frac{x}{16}} \\ f(-x)f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

◀

Exercice 3

1. Si $z \neq -1,\ z = \dfrac{z-1}{z+1} \iff z^2 + z = z - 1 \iff z^2 = -1 \iff z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
   Les points invariants par f sont les deux points d'affixes i et $-$i.
2. (a) $z \neq -1,\ (z'-1)(z+1) = \left(\dfrac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = z - 1 - z - 1 = -2$.
   (b) L'égalité de ces deux complexes entraîne l'égalité de leurs modules soit :
   $|\,(z'-1)(z+1)| = |-2| \iff |z'-1| \times |z+1| = 2 \iff \mathrm{A}M' \times \mathrm{B}M = 2$.
   Même chose pour les arguments :
   $\arg[(z'-1)(z+1)] = \arg(-2) \iff \arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi\ [2\pi] \iff \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right) = \pi\ [2\pi]$.
3. M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 si et seulement si BM $= 2 \iff |z - (-1)| = 2 \iff |z+1| = 2$.
   En reportant dans la première relation trouvée à la question précédente, il suit que $2\mathrm{A}M' = 2 \iff \mathrm{A}M' = 1$ qui signifie que M' appartient au cercle (C$'$) de centre A et de rayon 1.
4. (a) $p + 1 = -2 + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. D'où $|p+1|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Longrightarrow |p+1| = 2$. Donc $p + 1 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$
   (b) On vient de trouver que $|p+1| = 2 \iff$ BP $= 2$ qui signifie que P appartient au cercle (C).
   (c) D'après la question 2. a. on a :
   $$p' - 1 = \frac{-2}{p+1} = \frac{-2}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
   De plus $q - 1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que :
   $$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right) - \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) = \arg\left(\frac{q-1}{p'-1}\right)\ (2\pi)\ = \arg(2)\ (2\pi)\ = 0\ (2\pi)$$
   En conclusion, le point P' appartient à la demi-droite $[AQ)$.
   (d) On en déduit la construction simple de P' :
   – Construire Q symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées ;
   – La demi-droite $[AQ)$ coupe le cercle (C) en P'.


P
Q
B
O
A
−2
−2