

Fonctions convexes

Définition. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est convexe sur I si pour tout $x, y \in I$ on a :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Étude d'exemples

1. Donner une interprétation graphique de l'inégalité de convexité.
2. Prouver que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .
3. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .
4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle convexe sur \mathbb{R}_+ ?

Propriété fondamentale

Le but de cette partie est de prouver la propriété suivante :

Propriété. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ alors la fonction f est convexe sur \mathbb{R} .

On considère un réel donné y et on définit la fonction auxiliaire :

$$g(x) = \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1. Prouver que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
2. Prouver que f' est strictement croissante sur \mathbb{R} , en déduire que :
 si $x < y$ alors $g'(x) > 0$,
 si $x > y$ alors $g'(x) < 0$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur \mathbb{R} et prouver que $g(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.

Application

On admet que la propriété ci-dessus peut se généraliser au cas d'un intervalle I quelconque de \mathbb{R} .

Prouver que pour tout $x, y \in [0; \pi]$, on a :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin(x)+\sin(y)}{2}$$

On pourra étudier la fonction $x \mapsto -\sin(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.