

Limites remarquables

Le but de l'activité est d'établir deux limites remarquables :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Méthode par comparaison

- Le but de cette question est de prouver que $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}]$.
 - Étudier les variations de la fonction $\phi(x) = \sin x - x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
 - Étudier les variations de la fonction $\psi(x) = \sin x - x \cos x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
 - Conclure.
- En utilisant le "théorème des gendarmes", déduire de la question précédente que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- En utilisant la formule $\cos(2u) = 1 - 2 \sin^2(u)$ prouver que $\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$.
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Méthode du nombre dérivé

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert I admet un *nombre dérivé* en $a \in I$ si le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite quand x tend vers a et on note : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

- En utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction sinus en 0, prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- En utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction cosinus en 0, prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.