Limites remarquables

Le but de l'activité est d'établir deux limites remarquables :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Méthode par comparaison

1. Le but de cette question est de prouver que $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}]$.
   (a) Étudier les variations de la fonction $\phi(x) = \sin x - x \quad , \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction $\psi(x) = \sin x - x\cos x \quad , \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
   (c) Conclure.
2. En utilisant le "théorème des gendarmes", déduire de la question précédente que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
3. En utilisant la formule $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$ prouver que $\dfrac{\cos x - 1}{x} = -\dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Méthode du nombre dérivé

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert I admet un *nombre dérivé* en $a \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite quand x tend vers a et on note : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction sinus en 0, prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
2. En utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction cosinus en 0, prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.