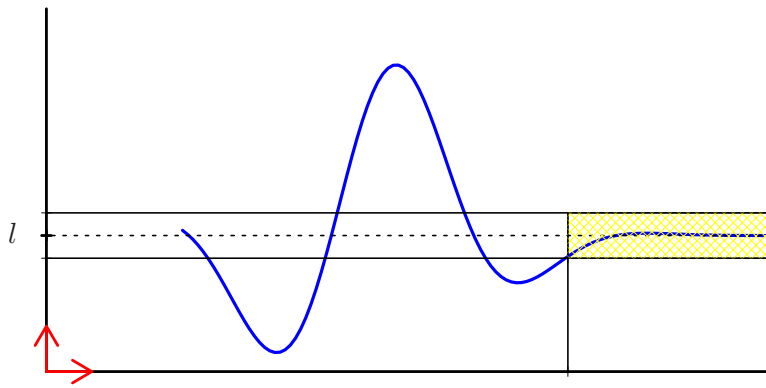


Limites et continuité

1 Limite d'une fonction

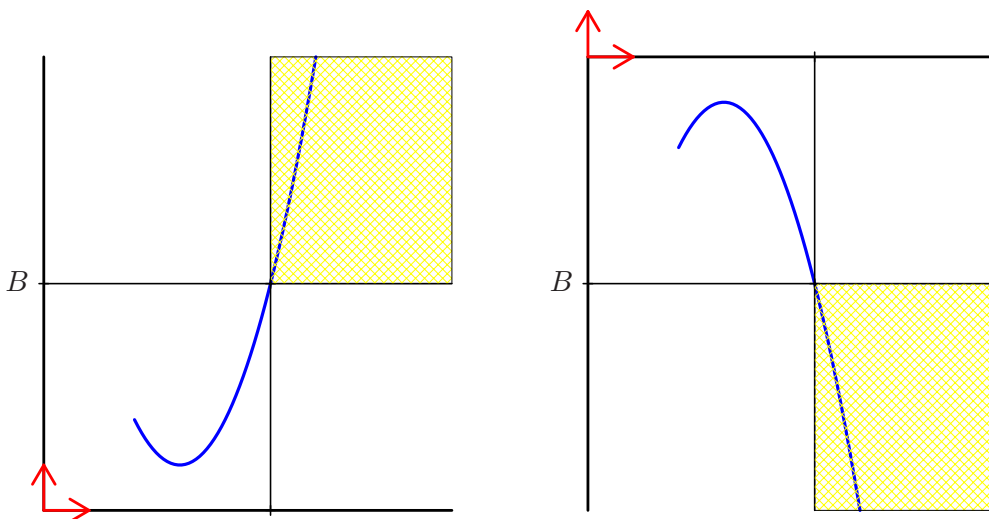
1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$. On dit que la fonction f admet pour limite le nombre l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

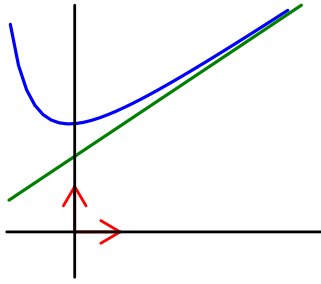


La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$. On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]B; +\infty[$ (resp. $] -\infty; B[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$).

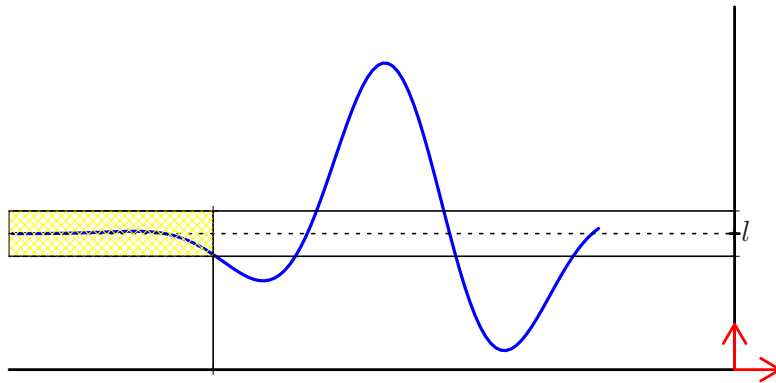


Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$. On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$.



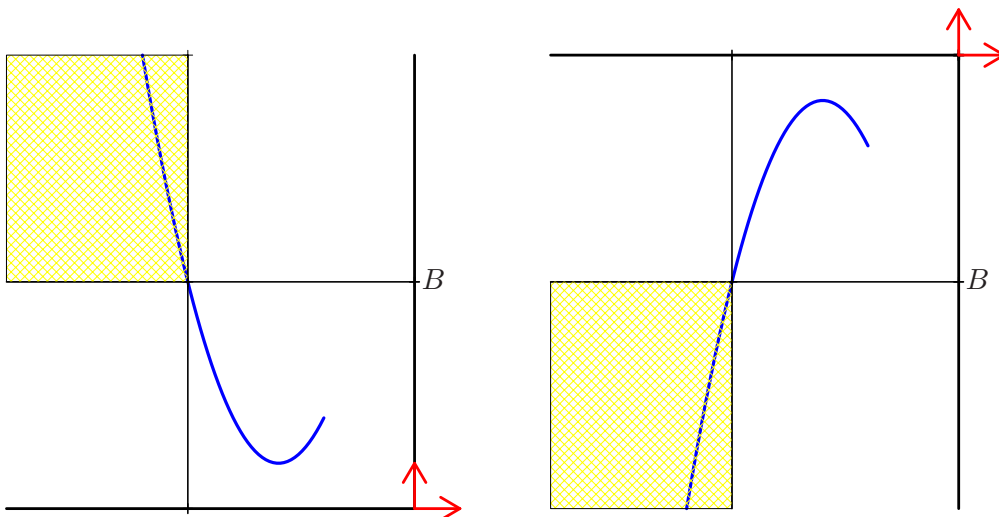
1.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty; A[$. On dit que la fonction f admet pour limite le nombre l en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif de valeur absolue assez grande et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

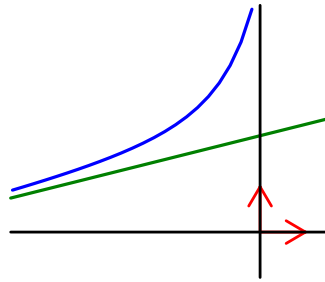


La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty; A[$. On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]B; +\infty[$ (resp. $] -\infty; B[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif de valeur absolue assez grande et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

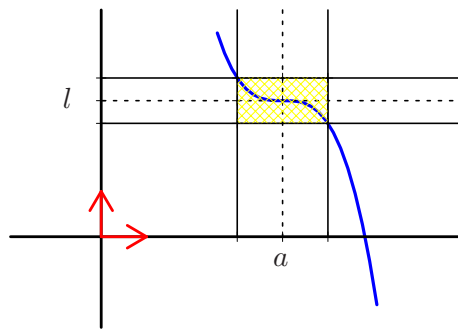


Définition 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A[$. On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$.

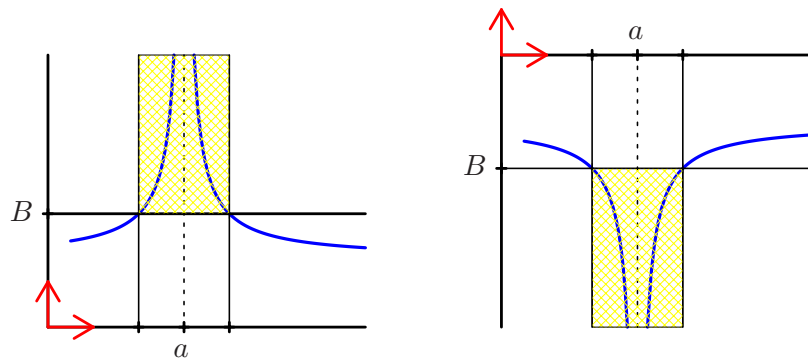


1.3 Limite d'une fonction en un réel

Définition 7. Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a . On dit que la fonction f admet pour limite le nombre l en a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.



Définition 8. Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a . On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si tout intervalle de la forme $]B; +\infty[$ (resp. $]-\infty; B[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).



La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

2 Opérations sur les limites

2.1 Limite de la somme de deux fonctions

Théorème 1.

$\lim_{x \rightarrow} u(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow} v(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow} [u(x) + v(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

Démonstration. admise. □

2.2 Limite du produit de deux fonctions

Théorème 2.

$\lim_{x \rightarrow} u(x)$	l	$l \neq 0$	0	∞
$\lim_{x \rightarrow} v(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow} [u(x) \times v(x)]$	$l \times l'$	∞	$?$	∞

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la multiplication.

Démonstration. admise. □

2.3 Limite du quotient de deux fonctions

Théorème 3.

$\lim_{x \rightarrow} u(x)$	l	$l \neq 0$	∞	l	∞	0
$\lim_{x \rightarrow} v(x)$	$l' \neq 0$	0	l'	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow} \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{l}{l'}$	∞	∞	0	$?$	$?$

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la division.

Démonstration. admise. □

2.4 Limite de la composée de deux fonctions

Définition 9. Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J . On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par $v \circ u(x) = v[u(x)]$.

Théorème 4. On désigne par les lettres α , β et γ un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = \beta$ et $\lim_{x \rightarrow \beta} v(x) = \gamma$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (v \circ u)(x) = \gamma$.

Démonstration. admise. □

3 Comparaison de limites

Le théorème qui suit est appelé *Théorème des Gendarmes*.

Théorème 5. On désigne par la lettre α un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et par la lettre l un nombre réel. Soient u , v et w trois fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} telles que $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ pour tout $x \in I$. Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} w(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = l$.

Démonstration. au programme dans le cas $\alpha = +\infty$. □

Dans le cas d'une limite infinie, un seul "gendarme" est nécessaire :

Théorème 6. On désigne par la lettre α un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient u et v deux fonctions définies au voisinage de α sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = +\infty$.
- Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = -\infty$.

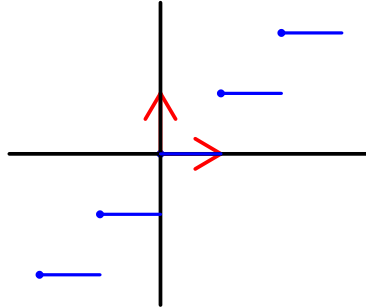
Démonstration. admise. □

4 Continuité d'une fonction

Définition 10. Une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est dite continue en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Contre-Exemple 1. fonction partie entière.

On note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x .



Définition 11. Une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Intuitivement, une fonction continue sur un intervalle peut être représentée graphiquement sans lever le crayon.

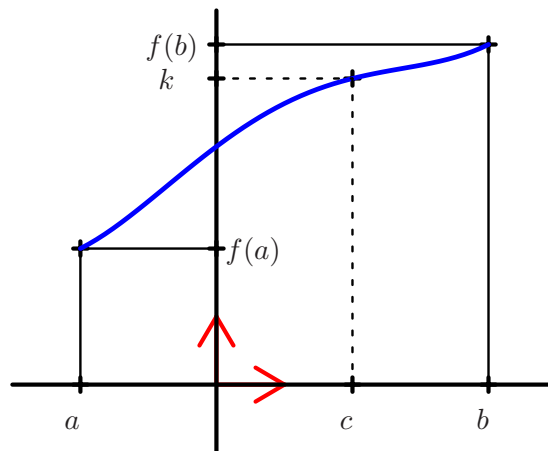
Théorème 7.

- Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur \mathbb{R} .
- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .
- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur \mathbb{R} .

Démonstration. admise. □

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et a et b deux réels de I . Pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.



Démonstration. au programme avec l'utilisation de suites adjacentes. □

Corollaire 1. Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . Alors pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

Démonstration. au programme. □