Devoir maison de Mathématiques n°1

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Préciser les asymptotes de $\mathcal{C}$. (Justifier.)
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$ on a $(f \circ f)(x) = x$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
3. Construire la courbe (C).

Exercice 3

Partie A

Soit ϕ la fonction numérique de la variable réelle x telle que $\phi(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de ϕ soit tangente au point I de coordonnées $(0;3)$ à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2 + 1}$, α et β étant deux réels que l'on déterminera.
2. Étudier la fonction f.
3. Étudier la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à la tangente (T) au point I de coordonnées $(0;3)$.
   Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
4. Construire la courbe (C) ; on prendra pour unité 2 cm.
5. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x telle que $g(x) = \dfrac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$ et soit (C') la courbe représentative de g. Sans étudier la fonction g, construire en pointillé la partie de (C') non contenue dans (C). (Justifier.)