

Correction du devoir maison de Mathématiques n°1

Exercice 1

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2 - 3}{2\sqrt{3}x^2}$$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

\searrow \nearrow
 $\sqrt{2}$

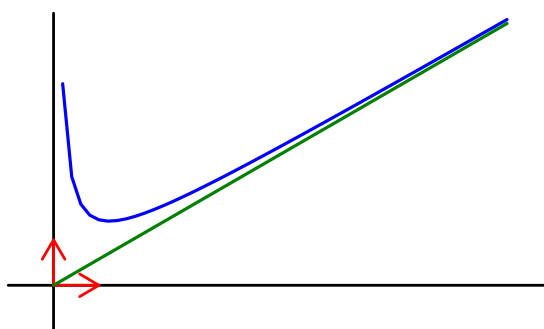
2. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc la courbe \mathcal{C} admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$$

donc la courbe \mathcal{C} admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ en $+\infty$.

3. Tracé de la courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormé.



Exercice 2

1. La fonction f est définie sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1]$ et :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0

\searrow
0

2. On a :

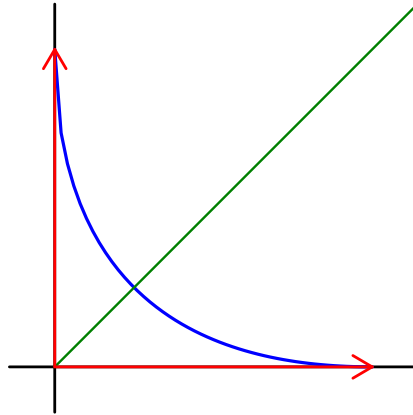
$$(f \circ f)(x) = (x - 2\sqrt{x} + 1) - 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1$$

Or $(\sqrt{x} - 1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$ on peut donc écrire $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = |\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$ car $\sqrt{x} - 1 \leq 0$ d'où finalement :

$$(f \circ f)(x) = (x - 2\sqrt{x} + 1) - 2(1 - \sqrt{x}) + 1 = x$$

Soit $M(x; y)$ un point de (C) , on a $y = f(x)$ d'où $f(y) = f(f(x)) = x$ ce qui prouve que le point $M'(y; x)$ appartient à (C) qui est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Tracé de la courbe (C) dans un repère orthonormé.



Exercice 3

Partie A

La fonction ϕ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\phi'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - (3x^2 + ax + b)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-ax^2 + (6 - 2b)x + a}{(x^2 + 1)^2}$$

Le point I appartient à la courbe représentative de ϕ si $\phi(0) = 3$ soit $b = 3$ d'où :

$$\phi'(x) = \frac{a(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Le coefficient directeur de la tangente est $\phi'(0) = 4$ d'où $a = 4$.

Partie B

1. Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} = \frac{3(x^2 + 1) + 4x}{x^2 + 1} = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1}$$

ce qui est la forme cherchée avec $\alpha = 3$ et $\beta = 4$.

2. D'après la partie précédente, la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = \frac{4(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	\searrow	1	\nearrow	5	\searrow	3

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = 0$ donc la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et $-\infty$.

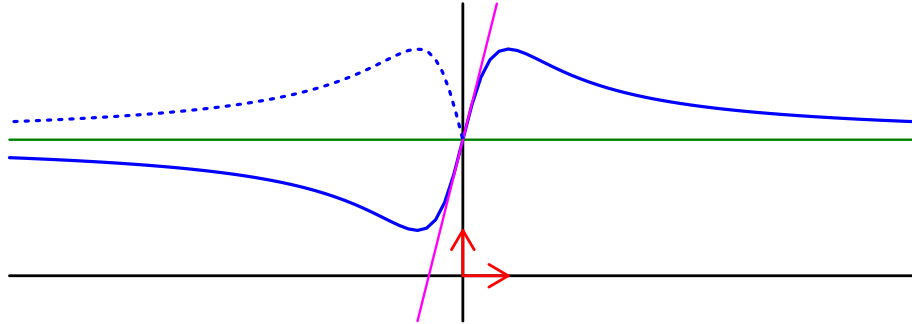
3. D'après la partie précédente, la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point I de coordonnées $(0; 3)$ a pour équation $y = 4x + 3$. Étudions la position de (C) par rapport à (T) :

$$f(x) - (4x + 3) = \left(3 + \frac{4x}{x^2 + 1}\right) - (4x + 3) = 4x \left(\frac{1}{x^2 + 1} - 1\right) = \frac{-4x^3}{x^2 + 1}$$

(C) est donc au-dessus de (T) pour $x \leq 0$ et au-dessous pour $x \geq 0$. Démontrons que I est centre de symétrie de (C) :

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{4x}{x^2 + 1} + 3 + \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1}\right) = 3$$

4. Tracé de la courbe (C) dans un repère orthonormé :



5. Si $x \geq 0$ on a $g(x) = f(x)$ et donc les courbes (C') et (C) sont confondues, pour $x \leq 0$ on remarque que la fonction g est paire donc (C') est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque :

$$g(x) = \frac{3x^2 + 4(-x) + 3}{x^2 + 1} = \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$$

d'où :

$$f(x) + g(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} + \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1} = \frac{3x^2 + 3}{x^2 + 1} = \frac{3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 3$$

Donc dans les négatifs, les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 3$.