# Correction du devoir maison de Mathématiques n°1

## Exercice 1

1. La fonction $f$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2-3}{2\sqrt{3}x^2}$$

D'où le tableau de variations de la fonction $f$ :

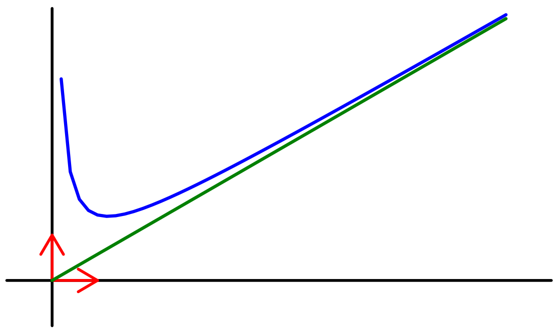
| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. On a $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} \left( f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$$

donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ en $+\infty$.

3. Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.



## Exercice 2

1. La fonction $f$ est définie sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1]$ et :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

D'où le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

2. On a :

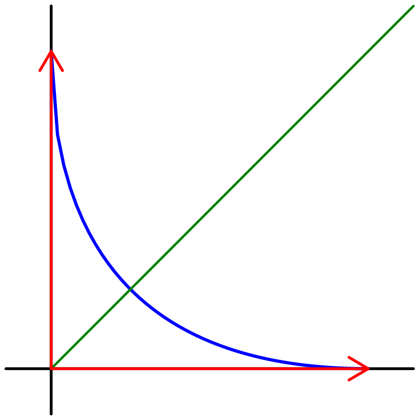
$$(f \circ f)(x) = (x - 2\sqrt{x} + 1) - 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1$$

Or $(\sqrt{x} - 1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$ on peut donc écrire $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = |\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$ car $\sqrt{x} - 1 \leqslant 0$ d'où finalement :

$$(f \circ f)(x) = (x - 2\sqrt{x} + 1) - 2(1 - \sqrt{x}) + 1 = x$$

Soit $M(x; y)$ un point de $(C)$, on a $y = f(x)$ d'où $f(y) = f(f(x)) = x$ ce qui prouve que le point $M'(y; x)$ appartient à $(C)$ qui est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Tracé de la courbe $(C)$ dans un repère orthonormé.



# Exercice 3

## Partie A

La fonction $\phi$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\phi'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - (3x^2 + ax + b)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-ax^2 + (6 - 2b)x + a}{(x^2 + 1)^2}$$

Le point $I$ appartient à la courbe représentative de $\phi$ si $\phi(0) = 3$ soit $b = 3$ d'où :

$$\phi'(x) = \frac{a(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Le coefficient directeur de la tangente est $\phi'(0) = 4$ d'où $a = 4$.

## Partie B

1. Pour tout réel $x$, on a :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} = \frac{3(x^2 + 1) + 4x}{x^2 + 1} = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1}$$

ce qui est la forme cherchée avec $\alpha = 3$ et $\beta = 4$.

2. D'après la partie précédente, la fonction $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{4(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

D'où le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $3$ |

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x}{x^2+1} = 0$ donc la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

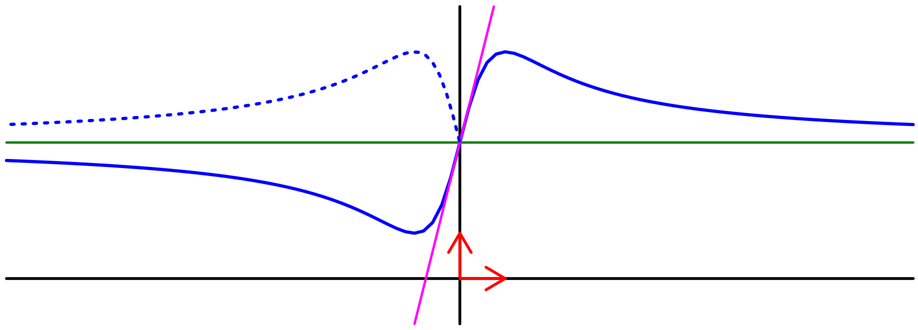
3. D'après la partie précédente, la tangente $(T)$ à la courbe $(C)$ représentative de $f$ au point $I$ de coordonnées $(0;3)$ a pour équation $y = 4x + 3$. Étudions la position de $(C)$ par rapport à $(T)$ :

$$f(x) - (4x+3) = \left(3 + \frac{4x}{x^2+1}\right) - (4x+3) = 4x\left(\frac{1}{x^2+1} - 1\right) = \frac{-4x^3}{x^2+1}$$

$(C)$ est donc au-dessus de $(T)$ pour $x \leqslant 0$ et au-dessous pour $x \geqslant 0$. Démontrons que $I$ est centre de symétrie de $(C)$ :

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{4x}{x^2+1} + 3 + \frac{4(-x)}{(-x)^2+1}\right) = 3$$

4. Tracé de la courbe $(C)$ dans un repère orthonormé :



5. Si $x \geqslant 0$ on a $g(x) = f(x)$ et donc les courbes $(C')$ et $(C)$ sont confondues, pour $x \leqslant 0$ on remarque que la fonction $g$ est paire donc $(C')$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque :

$$g(x) = \frac{3x^2 + 4(-x) + 3}{x^2+1} = \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2+1}$$

d'où :

$$f(x) + g(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1} + \frac{3x^2-4x+3}{x^2+1} = \frac{3x^2+3}{x^2+1} = \frac{3(x^2+1)}{x^2+1} = 3$$

Donc dans les négatifs, les courbes $(C)$ et $(C')$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 3$.