

Devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

Partie A : Question de cours

On admet le théorème dit des "valeurs intermédiaires" :

Théorème. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et a et b deux réels de I . Pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Démontrer que si la fonction f est en plus strictement décroissante alors pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe un unique réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$, on procédera par l'absurde en supposant l'existence de deux réels c solutions distincts et on montrera une contradiction.

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Démontrer que l'équation $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} et que $\alpha \in [3; 4]$.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$.
2. (a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - 7X + 10 = 0$.
(b) Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet quatre tangentes horizontales en des points que l'on précisera.
(c) Étudier les variations de la fonction f .
3. (a) Montrer que pour tout réel x , on a $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2 + 1}$, α , β et γ étant trois réels que l'on déterminera.
(b) Prouver que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique.
(c) Prouver que la courbe représentative de la fonction f admet le point $I(0; 1)$ pour centre de symétrie.
4. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, faire figurer sur le graphique les tangentes horizontales ainsi que l'asymptote oblique.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ainsi que l'ensemble des réels x en lesquels la fonction est dérivable.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{-3x+2}{2\sqrt{1-x}}$.
3. Étudier les variations de la fonction f .
4. Étudier suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet deux solutions x_1 et x_2 vérifiant :

$$0 < x_1 < \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < x_2 < 1$$

6. On pose $\alpha = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{5\pi}{9} \right)$ et $\beta = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{9} \right)$.
 - (a) Démontrer la formule $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ à partir de la formule d'addition $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
 - (b) Prouver que $\alpha^2(1-\alpha) = \beta^2(1-\beta) = \frac{1}{27}$.
 - (c) En déduire que $x_1 = \alpha$ et $x_2 = \beta$.