Devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

Partie A : Question de cours

On admet le théorème dit des "valeurs intermédiaires" :

Théorème. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I. Pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.*

Démontrer que si la fonction f est en plus strictement croissante alors pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe un unique réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$, on procédera par l'absurde en supposant l'existence de deux réels c solutions distincts et on montrera une contradiction.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Démontrer que l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [3; 4]$.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 + 1}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-X^2 + 7X - 10 = 0$.
   (b) Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet quatre tangentes horizontales en des points que l'on précisera.
   (c) Étudier les variations de la fonction f.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma x}{x^2 + 1}$, α, β et γ étant trois réels que l'on déterminera.
   (b) Prouver que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique.
   (c) Prouver que la courbe représentative de la fonction f admet le point $I(0; 1)$ pour centre de symétrie.
4. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, faire figurer sur le graphique les tangentes horizontales ainsi que l'asymptote oblique.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ainsi que l'ensemble des réels x en lesquels la fonction est dérivable.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-3x+2}{2\sqrt{1-x}}$.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Étudier suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet deux solutions x_1 et x_2 vérifiant :

$$0 < x_1 < \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < x_2 < 1$$

6. On pose $\alpha = \dfrac{1}{3}\left(1 + 2\cos\dfrac{5\pi}{9}\right)$ et $\beta = \dfrac{1}{3}\left(1 + 2\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$.
   (a) Démontrer la formule $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ à partir de la formule d'addition $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$.
   (b) Prouver que $\alpha^2(1-\alpha) = \beta^2(1-\beta) = \dfrac{1}{27}$.
   (c) En déduire que $x_1 = \alpha$ et $x_2 = \beta$.