Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

Partie A

On suppose l'existence d'au moins deux réels $c_1, c_2 \in [a;b]$ avec $c_1 < c_2$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = k$. Comme f est strictement décroissante sur l'intervalle $[a;b]$ on a $f(c_1) < f(c_2)$ soit $k < k$ ce qui est impossible !

Par conséquent il ne peut exister plus d'une solution $c \in [a;b]$ à l'équation $f(c) = k$ si la fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$ et comme le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il en existe au moins une si la fonction f est continue sur $[a;b]$ nous pouvons conclure à l'existence d'une unique solution $c \in [a;b]$ à l'équation $f(c) = k$ si la fonction f est continue et strictement croissante sur $[a;b]$.

Partie B

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

2. On peut écrire pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ et de plus :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

3. D'après le tableau de variations, on a $f(x) \leqslant -1$ si $x \leqslant 2$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty;2]$. De plus $f(2) = -5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ donc d'après la question de cours, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
On remarque également que $f(3) = -1 < 0$ et $f(4) = 15 > 0$ donc $\alpha \in [3;4]$.
4. À l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice on obtient $3,10 < \alpha < 3,11$.

Exercice 2

1. La fonction f est une fonction rationnelle, son dénominateur ne s'annulant pas elle est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{(-3x^2+2x-10)(x^2+1) - (-x^3+x^2-10x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4+7x^2-10}{(x^2+1)^2}$$

2. (a) L'équation $-X^2 + 7X - 10 = 0$ admet pour solutions $X_1 = 2$ et $X_2 = 5$.

   (b) Les tangentes horizontales de la courbe représentative de la fonction f s'obtiennent en résolvant l'équation $f'(x) = 0$ soit $-(x^2)^2 + 7(x^2) - 10 = 0$ et d'après la question précédente on obtient quatre solutions $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ et $x_4 = \sqrt{5}$.
   De plus :

$$\begin{array}{rcccccccc}
f(x_1) & = & f(-\sqrt{5}) & = & \dfrac{5\sqrt{5}+5+10\sqrt{5}+1}{5+1} & = & \dfrac{6+15\sqrt{5}}{6} & = & 1+\dfrac{5\sqrt{5}}{2} \\
f(x_2) & = & f(-\sqrt{2}) & = & \dfrac{2\sqrt{2}+2+10\sqrt{2}+1}{2+1} & = & \dfrac{3+12\sqrt{2}}{3} & = & 1+4\sqrt{2} \\
f(x_3) & = & f(\sqrt{2}) & = & \dfrac{-2\sqrt{2}+2-10\sqrt{2}+1}{2+1} & = & \dfrac{3-12\sqrt{2}}{3} & = & 1-4\sqrt{2} \\
f(x_4) & = & f(\sqrt{5}) & = & \dfrac{-5\sqrt{5}+5-10\sqrt{5}+1}{5+1} & = & \dfrac{6-15\sqrt{5}}{6} & = & 1-\dfrac{5\sqrt{5}}{2}
\end{array}$$

   La courbe représentative de la fonction f admet quatre tangentes horizontales aux points :

$$M_1(-\sqrt{5}; 1+\frac{5\sqrt{5}}{2}) \qquad M_2(-\sqrt{2}; 1+4\sqrt{2}) \qquad M_3(\sqrt{2}; 1-4\sqrt{2}) \qquad M_4(\sqrt{5}; 1-\frac{5\sqrt{5}}{2})$$

   (c) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x) = \dfrac{-(x^2-2)(x^2-5)}{(x^2+1)^2}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{5\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$1+4\sqrt{2}$	$\searrow$	$1-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$1-\frac{5\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

3. (a) On a :

$$\alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2+1} = \frac{\alpha x(x^2+1) + \beta(x^2+1) + \gamma x}{x^2+1} = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha+\gamma)x + \beta}{x^2+1}$$

   D'où par identification $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\gamma = -9$ et donc :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{9x}{x^2+1}$$

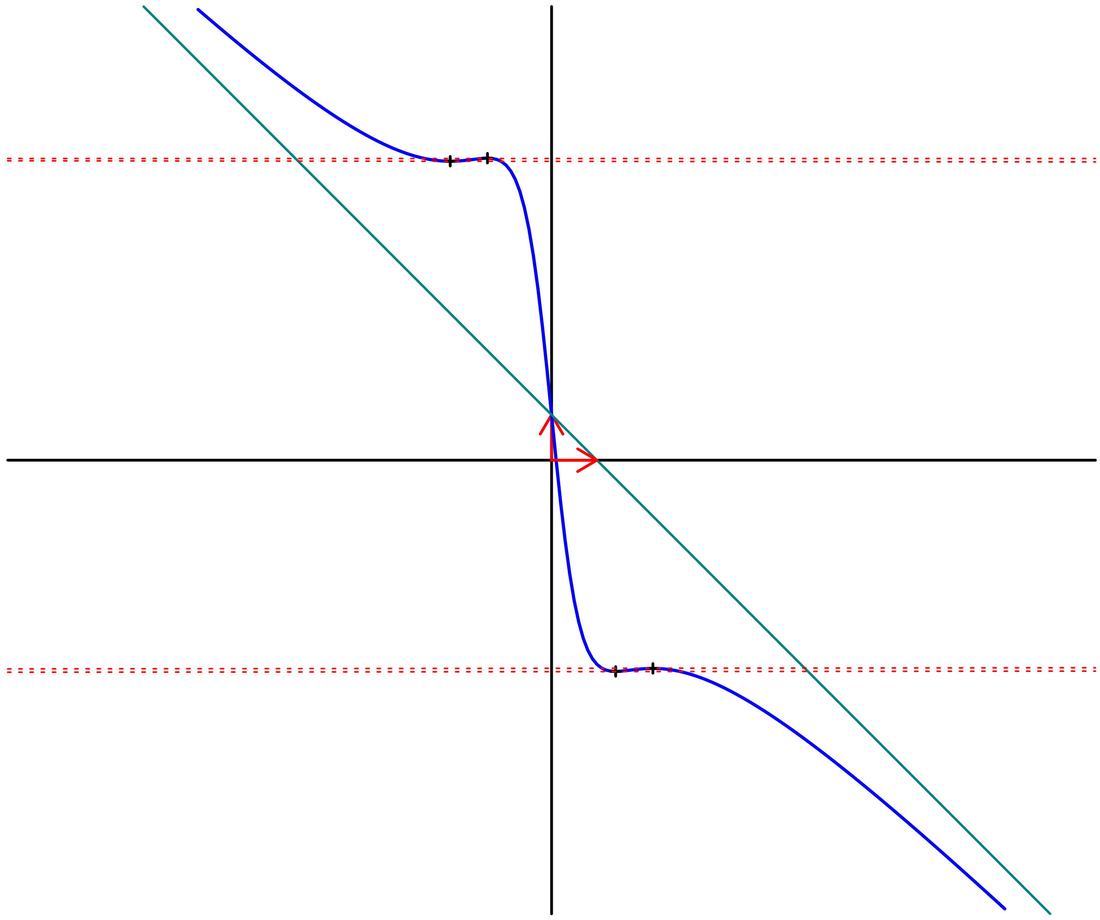
   (b) La courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$ la droite d'équation $y = -x + 1$ car :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{9x}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{9}{x+\frac{1}{x}}\right] = 0$$

   (c) La courbe représentative de la fonction f admet le point $I(0;1)$ pour centre de symétrie car :

$$\begin{aligned}
\frac{f(-x)+f(x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{-(-x)^3+(-x)^2-10(-x)+1}{(-x)^2+1} + \frac{-x^3+x^2-10x+1}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3+x^2+10x+1-x^3+x^2-10x+1}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2(x^2+1)}{x^2+1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



Exercice 3

1. En raison de la présence de la fonction racine carrée, la fonction f est définie pour $1 - x \geqslant 0$ soit $x \in]-\infty; 1]$ et dérivable pour $1 - x > 0$ soit $x \in]-\infty; 1[$.
2. On utilise la formule de dérivation du produit de deux fonctions :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{1-x} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(\sqrt{1-x})^2 - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-3x+2}{2\sqrt{1-x}}$$

3. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

4. D'où l'étude du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$:
   - Si $k > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.
   - Si $k = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution.
   - Si $0 \leqslant k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
   - Si $k < 0$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution.

5. On remarque que $0 \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ donc d'après la question précédente l'équation $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet deux solutions x_1 et x_2. De plus on a $f(0) = 0 < \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f(1) = 0 < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ donc on peut poser $0 < x_1 < \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < x_2 < 1$.

6. (a)

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\
&= \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \cos^3\theta - \cos\theta\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\sin^2\cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

(b) On pose $\gamma = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\theta)$, alors :

$$\begin{aligned}
\gamma^2(1-\gamma) &= \frac{1}{9}(1+2\cos\theta)^2\left[1 - \frac{1}{3}(1+2\cos\theta)\right] \\
&= \frac{1}{27}(1+2\cos\theta)^2\left[3 - (1+2\cos\theta)\right] \\
&= \frac{1}{27}(1+2\cos\theta)^2(2-2\cos\theta) \\
&= \frac{2}{27}(1+2\cos\theta)^2(1-\cos\theta) \\
&= \frac{2}{27}(1+4\cos\theta+4\cos^2\theta)(1-\cos\theta) \\
&= \frac{2}{27}(1+3\cos\theta-4\cos^3\theta) \\
&= \frac{2}{27}(1-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)) \\
&= \frac{2}{27}(1-\cos 3\theta)
\end{aligned}$$

On en déduit en remplaçant θ par $\frac{5\pi}{9}$ et $\frac{\pi}{9}$ que :

$$\alpha^2(1-\alpha) = \frac{2}{27}(1-\cos\frac{5\pi}{3}) = \frac{2}{27}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{27}$$

et :

$$\beta^2(1-\beta) = \frac{2}{27}(1-\cos\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{27}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{27}$$

(c) On en déduit que :

$$\sqrt{\alpha^2(1-\alpha)} = \sqrt{\beta^2(1-\beta)} = \sqrt{\frac{1}{27}}$$

et puisque α et β appartiennent à l'intervalle $[0;1]$:

$$\alpha\sqrt{1-\alpha} = \beta\sqrt{1-\beta} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

α et β sont solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ et comme $0 < \alpha < \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < \beta < 1$ on en déduit que $x_1 = \alpha$ et $x_2 = \beta$.