Dérivation des fonctions usuelles

Définition du nombre dérivé d'une fonction f en x_0.

Définition 1. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0, cette limite est alors appelée* nombre dérivé *de la fonction f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*

Définition 2. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0, cette limite est alors appelée* nombre dérivé *de la fonction f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*

Prouver que les deux définitions ci-dessus sont équivalentes.

Nombre dérivé des fonctions usuelles

On définit le taux d'accroissement d'une fonction f en x_0 par $\Delta(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

1. On considère la fonction carré $f(x) = x^2$. Calculer son taux d'accroissement $\Delta(h)$ en x_0 et prouver que f admet un nombre dérivé en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $f'(x_0) = 2x_0$.
2. On considère la fonction cube $f(x) = x^3$. Calculer son taux d'accroissement $\Delta(h)$ en x_0 et prouver que f admet un nombre dérivé en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $f'(x_0) = 3x_0^2$.
3. On considère la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculer son taux d'accroissement $\Delta(h)$ en x_0 et prouver que f admet un nombre dérivé en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et que $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.
4. On considère la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer son taux d'accroissement $\Delta(h)$ en x_0 et prouver que f admet un nombre dérivé en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
5. (a) On considère la fonction sinus $f(x) = \sin(x)$. Calculer son taux d'accroissement $\Delta(h)$ en x_0 et prouver que f admet un nombre dérivé en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

   (b) On considère la fonction cosinus $f(x) = \cos(x)$. Calculer son taux d'accroissement $\Delta(h)$ en x_0 et prouver que f admet un nombre dérivé en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $f'(x_0) = -\sin(x_0)$.

   On pourra pour cette question utiliser les résultats suivants :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$