

# Dérivées et Primitives

## 1 Dérivée d'une fonction

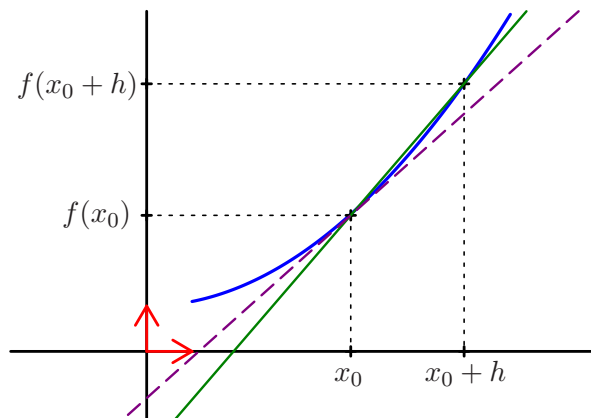
### 1.1 Nombre dérivé d'une fonction $f$ en $x_0$ .

**Définition 1.** Une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  est dite dérivable en  $x_0 \in I$  si le quotient  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $x_0$ , cette limite est alors appelée nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$ .

Cette définition peut être formulée différemment en posant  $x = x_0 + h$  :

**Définition 2.** Une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  est dite dérivable en  $x_0 \in I$  si le quotient  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  admet une limite quand  $h$  tend vers 0, cette limite est alors appelée nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$ .

La quantité  $\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  est appelée taux d'accroissement de la fonction  $f$  en  $x_0$ .



$\Delta_{x_0}(h)$  peut s'interpréter graphiquement comme le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe représentative de  $f$  d'abscisses  $x_0$  et  $x_0 + h$ .

**Propriété 1.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et dérivable en  $x_0 \in I$  alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente au point  $M_0(x_0; f(x_0))$  d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

La fonction affine  $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  est la meilleure approximation locale de la fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

*Démonstration.* admise. □

On peut donc écrire au voisinage de  $x_0$  que  $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  soit  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq f'(x_0)$

d'où l'écriture différentielle utilisée en Physique :  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ .

**Théorème 1.** Une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et dérivable en  $x_0 \in I$  est continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* au programme. □

## 1.2 Fonctions dérivées

**Définition 3.** Une fonction  $f$  définie sur un intervalle de  $I$  de  $\mathbb{R}$  est dite dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ , la fonction qui à tout réel  $x \in I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$  de  $f$  en  $x$  est appelée fonction dérivée de  $f$  et notée  $f'$ .

**Théorème 2.** Dérivées des fonctions usuelles.

$f(x)$	ensemble de définition	intervalle(s) de dérivabilité	$f'(x)$
Cte	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a$
$x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
$x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n$ , $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ , $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$

Démonstration. partiellement au programme. □

**Théorème 3.** Dérivées et opérations.

- Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$  est dérivable sur  $I$  et  $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$ .
- Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $k$  un nombre réel alors la fonction  $ku : x \mapsto k \times u(x)$  est dérivable sur  $I$  et  $(ku)'(x) = k \times u'(x)$ .
- Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$  est dérivable sur  $I$  et  $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ .
- Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  ne s'annulant pas sur  $I$  alors la fonction  $\frac{1}{u} : x \mapsto \frac{1}{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ .
- Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  avec  $v$  ne s'annulant pas sur  $I$  alors la fonction  $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ .

Démonstration. au programme. □

**Théorème 4.** Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans un intervalle  $J$  et  $v$  une fonction définie et dérivable sur  $J$  alors la fonction composée  $v \circ u$  est définie et dérivable sur  $I$  et  $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$ .

Démonstration. au programme. □

**Exemple 1.** Dérivée des fonctions  $u^n$ ,  $\sqrt{u}$ ,  $\frac{1}{u^n}$ ,  $\sin u$ ,  $\cos u$  ...

### 1.3 Dérivée et variations d'une fonction

**Théorème 5.** On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$  alors :

- Si  $f$  est constante sur  $I$  alors  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ .
- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$ .

*Démonstration.* au programme. □

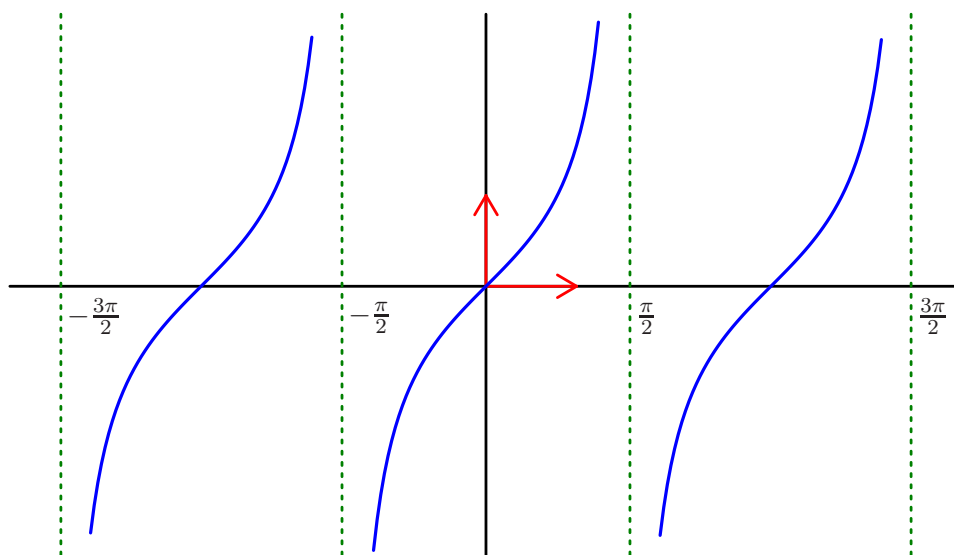
**Théorème 6.** On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$  alors :

- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$  alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

*Démonstration.* admise. □

### 1.4 Étude de la fonction tangente

**Définition 4.** La fonction tangente est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  par  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .



**Propriété 2.** La fonction tangente est impaire et  $\pi$ -périodique.

**Propriété 3.**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} = -\infty$$

**Propriété 4.** La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et  $(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ .

**Corollaire 1.** La fonction tangente est strictement croissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

## 2 Primitive d'une fonction

### 2.1 Notion de primitive

**Définition 5.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On appelle primitive de la fonction  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  définie et dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$ .

**Exemple 2.** primitive d'une fonction polynôme.

**Théorème 7.** Toute fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives.

*Démonstration.* admise. □

**Théorème 8.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Toute primitive de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $F + k$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Théorème 9.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  avec  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  vérifiant la condition initiale  $F(x_0) = y_0$ .

*Démonstration.* au programme. □

### 2.2 Primitives de référence

**Théorème 10.** Primitives des fonctions usuelles.

fonction $f$	primitive $F$	intervalle de définition
$a$	$ax + k$	$\mathbb{R}$
$x$	$\frac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$x^2$	$\frac{x^3}{3} + k$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + k$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$] -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[ , n \in \mathbb{Z}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x + k$	$] -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[ , n \in \mathbb{Z}$

**Théorème 11.** Primitives issues de la formule de dérivation des fonctions composées.

fonction $f$	primitive $F$
$u' \times u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^n} = u' \times u^{-n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$u' \times \sin u$	$-\cos u + k$
$u' \times \cos u$	$\sin u + k$