Devoir maison de Mathématiques n°2

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Expliquer pourquoi on peut limiter l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0;2]$.
3. Démontrer que f n'est pas dérivable en $x = 2$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.
4. Justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;2[$ et calculer sa dérivée $f'(x)$.
5. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.
6. Déterminer la(les) tangente(s) horizontale(s) à la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.
7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
8. Étudier la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 sur l'intervalle $[0;2]$.
9. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 5cm, on fera figurer les tangentes remarquables mises en évidence dans les questions précédentes.

Exercice 2

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $f'(x)+x[f(x)]^2 = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 2$.

1. On suppose que la fonction f ne s'annule pas, montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = x$.
2. En déduire qu'il existe un réel k tel que $f(x) = \dfrac{2}{x^2+k}$.
3. Prouver que $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.
4. Vérifier que la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ est bien solution de l'équation différentielle $f'(x)+x[f(x)]^2 = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 2$.

Exercice 3

1. Justifier que la fonction inverse admet sur l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique primitive ϕ s'annulant en 1.
2. Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout $x, y \in]0;+\infty[$ on a $\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$.
   (a) Soit $y \in]0;+\infty[$, on considère la fonction $\psi(x) = \phi(xy)$. Démontrer que ψ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que $\psi'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel k tel que $\psi(x) = \phi(x) + k$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   (c) Calculer $\psi(1)$ et en déduire la valeur de k.
   (d) Conclure.