Correction du devoir maison de Mathématiques n°2

Exercice 1

1. En raison de la présence de la fonction racine carrée, la fonction f est définie pour $4 - x^2 \geqslant 0$ soit $\mathcal{D}_f = [-2; 2]$.
2. On a $f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$, la fonction f est donc impaire et on peut limiter l'étude à l'intervalle $[0; 2]$.
3. On calcule le taux d'accroissement de la fonction f en $x = 2$ à gauche $(h < 0)$:

$$\Delta(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)\sqrt{-4h - h^2}}{h} = -(2+h)\sqrt{\frac{-4h - h^2}{h^2}} = -(2+h)\sqrt{\frac{4}{-h} - 1}$$

   On a $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \Delta(h) = -\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en $x = 2$ et sa courbe représentative admet une tangente verticale en $x = 2$.
4. En raison de la présence de la fonction racine carrée, la fonction f est dérivable pour $4 - x^2 > 0$ soit sur l'intervalle $]-2; 2[$. De plus :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{(4 - x^2) - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

5. On en déduit les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$:

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

6. f' s'annule en $x = \sqrt{2}$ sur l'intervalle $[0; 2[$ donc la courbe représentative de la fonction f admet sur l'intervalle $[0; 2]$ une tangente horizontale au point de coordonées $(\sqrt{2}; 2)$.
7. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 a pour équation :

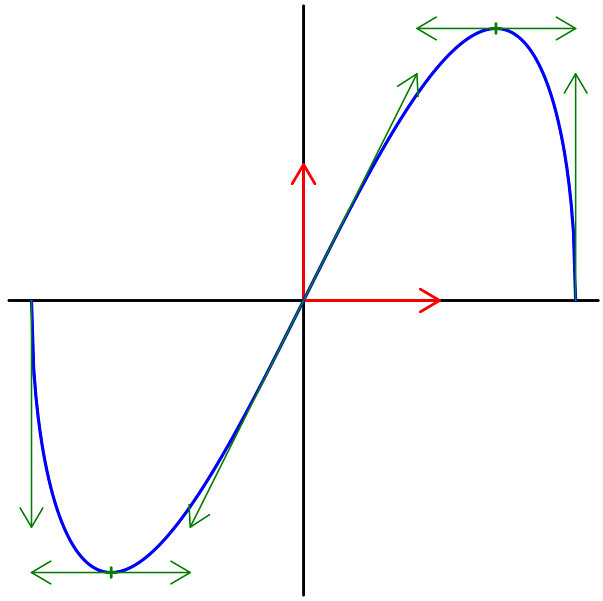
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2(x - 0) + 0 = 2x$$

8. Pour déterminer la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 sur l'intervalle $[0; 2]$ on étudie le signe de la quantité :

$$f(x) - 2x = x\sqrt{4 - x^2} - 2x = x(\sqrt{4 - x^2} - 2) = \frac{x(\sqrt{4 - x^2} - 2)(\sqrt{4 - x^2} + 2)}{\sqrt{4 - x^2} + 2} = \frac{x(4 - x^2 - 4)}{\sqrt{4 - x^2} + 2} = \frac{-x^3}{\sqrt{4 - x^2} + 2}$$

   On a $f(x) - 2x \leqslant 0$ pour $x \in [0; 2]$ donc la courbe représentative de la fonction f est située en dessous de sa tangente en 0 sur l'intervalle $[0; 2]$.

9. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est la suivante :



Exercice 2

1. On suppose que la fonction f ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{x[f(x)]^2}{[f(x)]^2} = x$$
2. On en déduit qu'il existe un réel C tel que $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{x^2}{2} + C$, soit $\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C$ d'où :
$$f(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{2} + C} = \frac{2}{x^2 + 2C}$$
Ce qui est la forme demandée en posant $k = 2C$.
3. On utilise la condition initiale $f(0) = \frac{2}{k} = 2$ d'où $k = 1$ et $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$.
4. On a bien $f(0) = 2$ et de plus :
$$f'(x) = \frac{-2 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$
d'où :
$$f'(x) + x[f(x)]^2 = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} + x\frac{4}{(x^2+1)^2} = 0$$

Exercice 3

1. La fonction inverse est définie et continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$, elle admet donc une unique primitive ϕ telle que $\phi(1) = 0$.
2. (a) La fonction ϕ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $\phi'(x) = \frac{1}{x}$. D'après le théorème de composition, la fonction ψ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\psi'(x) = y \times \phi'(xy) = y \times \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$.
   (b) Les fonctions ϕ et ψ sont donc deux primitives de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$, il existe donc un réel k tel que $\psi(x) = \phi(x) + k$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
   (c) On a $\psi(1) = \phi(1 \times y) = \phi(y)$ et $\psi(1) = \phi(1) + k = 0 + k = k$, on en déduit $k = \phi(y)$.
   (d) On en conclut que $\psi(x) = \phi(x) + \phi(y)$ soit $\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$ pour tout $x, y \in]0; +\infty[$.