

## Devoir de Mathématiques n°2

### Questions de Cours

1. Prouver que la fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = 2x$ .
2. Prouver que si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  avec  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$  alors il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  vérifiant la condition initiale  $F(x_0) = y_0$  (on admet qu'une fonction continue possède des primitives).

### Exercice 1

Pour chacune des quatre affirmations ci-dessous dire si celle-ci est Vraie ou Fausse, une réponse juste rapporte 1 point et une réponse fausse retire un point, l'absence de réponse ne retire ni ne rapporte aucun point. L'exercice est noté de 0 à 4.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

1. Il existe une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; 1]$  telle que  $F(0) = -1$ .
2. Il existe une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; 1]$  telle que  $F(1) = F(0)$ .
3. Il existe une primitive  $F$  de  $f$  strictement décroissante sur  $[0; 1]$ .
4. Il existe une primitive  $F$  de  $f$  strictement négative sur  $[0; 1]$ .

### Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$ .
2. En déduire les variations de la fonction  $f$ .
3. On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .
  - (a) Déterminer les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}$ .
  - (b) Déterminer les tangentes horizontales à la courbe  $\mathcal{C}$ .
  - (c) Déterminer l'équation de la tangente  $T_0$  à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $x = 0$ .
  - (d) Déterminer la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $T_0$ .
  - (e) Construire la courbe  $\mathcal{C}$  dans un repère orthogonal avec pour unités 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, faire figurer sur le graphique les tangentes ainsi que les asymptotes.

### Exercice 3

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  solution de l'équation différentielle  $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$ ,  $x \geq 0$  avec la condition initiale  $f(0) = 1$ .

1. Prouver que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. En déduire que la fonction  $f$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Prouver que la fonction  $\frac{1}{f}$  est définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  et que  $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -1$ , en déduire l'expression de la fonction  $\frac{1}{f}$  en fonction de  $x$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
4. L'équation différentielle  $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$  admet-elle une solution  $f$  définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  avec la condition initiale  $f(0) = 1$  ?

### Exercice 4

On considère l'équation :

$$(E) : z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$$

1. Démontrer que le nombre  $i$  est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .