Devoir de Mathématiques n°2

Questions de Cours

1. Prouver que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
2. Prouver que si f est une fonction continue sur I admettant une primitive F sur I alors toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Pour chacune des quatre affirmations ci-dessous dire si celle-ci est Vraie ou Fausse, une réponse juste rapporte 1 point et une réponse fausse retire un point, l'absence de réponse ne retire ni ne rapporte aucun point. L'exercice est noté de 0 à 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 2$$

1. Il existe une primitive F de f sur $[0; 1]$ telle que $F(0) = -1$.
2. Il existe une primitive F de f sur $[0; 1]$ telle que $F(1) = F(0)$.
3. Il existe une primitive F de f strictement décroissante sur $[0; 1]$.
4. Il existe une primitive F de f strictement négative sur $[0; 1]$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 + x^2}$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de la fonction f.
3. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   (a) Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Déterminer les tangentes horizontales à la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}$ en $x = 0$.
   (d) Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T_0.
   (e) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal avec pour unités 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, faire figurer sur le graphique les tangentes ainsi que les asymptotes.

Exercice 3

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ solution de l'équation différentielle $[f(x)]^2 - f'(x) = 0 \quad , \quad x \geqslant 0$ avec la condition initiale $f(0) = 1$.

1. Prouver que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. En déduire que la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Prouver que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -1$, en déduire l'expression de la fonction $\dfrac{1}{f}$ en fonction de x sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
4. L'équation différentielle $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$ admet-elle une solution f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ avec la condition initiale $f(0) = 1$?

Exercice 4

On considère l'équation :

$$(E) \;:\; z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i = 0$$

1. Démontrer que le nombre i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).