

Correction du devoir de Mathématiques n°2

Exercice 1

1. VRAI : la fonction f est continue sur $[0; 1]$ donc admet une unique primitive F sur $[0; 1]$ telle que $F(0) = -1$.
2. FAUX : on a $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x + k$ d'où $F(0) = k$ et $F(1) = -\frac{19}{6} + k \neq F(0)$.
3. VRAI : la fonction f est strictement négative sur $[0; 1]$ donc toute primitive F de $f = F'$ est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
4. VRAI : toute primitive F de f étant strictement décroissante sur $[0; 1]$, il suffit de considérer une primitive vérifiant $F(0) < 0$.

Exercice 2

1. La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = \frac{1 \times (1 + x^2) - (1 + x) \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1 + x^2)^2}$$

2. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	
$f'(x)$	-	0	+
			0
			$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow
	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		

3. (a) La courbe \mathcal{C} admet l'axe des abscisses pour asymptote en $\pm\infty$, en effet :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} + x} = 0$$

- (b) La courbe \mathcal{C} admet deux tangentes horizontales aux points $(-1 - \sqrt{2}; \frac{1 - \sqrt{2}}{2})$ et $(-1 + \sqrt{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2})$.

- (c) La tangente T_0 à la courbe \mathcal{C} en $x = 0$ a pour équation :

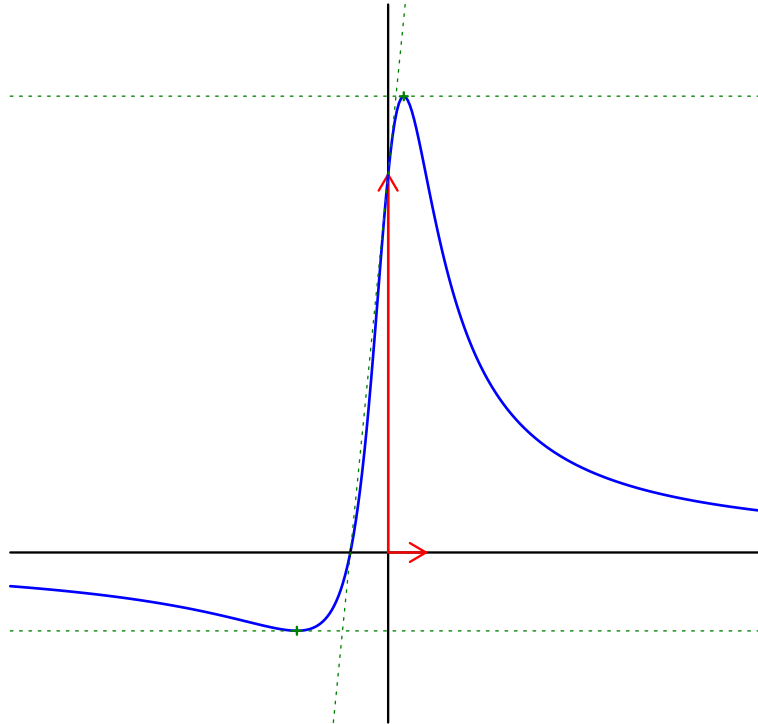
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$$

- (d) Pour déterminer la position relative de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite T_0 , on étudie le signe de la quantité :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{1 + x}{1 + x^2} - \frac{(1 + x)(1 + x^2)}{1 + x^2} = \frac{-x^2(1 + x)}{1 + x^2}$$

Pour $x < -1$ on a $f(x) - (x + 1) > 0$ donc la courbe \mathcal{C} est au dessus de la droite T_0 , pour $x > -1$ on a $f(x) - (x + 1) < 0$ donc la courbe \mathcal{C} est au dessous de la droite T_0 .

(e) La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f est la suivante :



Exercice 3

1. On a $f'(x) = [f(x)]^2 \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. De plus $f(0) = 1$ donc $f(x) \geq 1$ pour $x \geq 0$ donc la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. La fonction f est définie, dérivable et ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ donc la fonction $\frac{1}{f}$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{[f(x)]^2}{[f(x)]^2} = -1$$

On en déduit qu'il existe un réel k tel que $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -x + k$ et comme $f(0) = 1$ on a $k = 1$ d'où

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -x + 1 \text{ pour } x \geq 0.$$

4. On constate que la fonction $\frac{1}{f}$ s'annule en $x = 1$ ce qui est une contradiction donc l'équation différentielle $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$ n'admet pas de solution f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ avec la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 4

1. On a :

$$i^3 - (6+i)i^2 + (13+6i)i - 13i = -i - (6+i)(-1) + (13+6i)i - 13i = -i + 6 + i + 13i - 6 - 13i = 0$$

2. On a :

$$(z-i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - biz - ci = az^3 + (b-ai)z^2 + (c-bi)z - ci$$

d'où par identification $a = 1$, $b = -6$ et $c = 13$.

3. On a montré que :

$$z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i = (z-i)(z^2 - 6z + 13)$$

on en déduit les solutions de l'équation (E) à savoir $x_0 = i$, $x_1 = 3 - 2i$ et $x_2 = 3 + 2i$.