Correction du devoir de Mathématiques n°2

Exercice 1

1. VRAI : la fonction f est continue sur $[0;1]$ donc admet une unique primitive F sur $[0;1]$ telle que $F(0) = -1$.
2. FAUX : on a $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + 2x + k$ d'où $F(0) = k$ et $F(1) = \dfrac{23}{6} + k \neq F(0)$.
3. FAUX : la fonction f est strictement positive sur $[0;1]$ donc toute primitive F de $f = F'$ est strictement croissante sur $[0;1]$.
4. VRAI : toute primitive F de f étant strictement croissante sur $[0;1]$, il suffit de considérer une primitive vérifiant $F(1) < 0$.

Exercice 2

1. La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{(-1) \times (1+x^2) - (1-x) \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$$

2. On en déduit les variations de la fonction f :

x		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$

3. (a) La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote en $\pm\infty$, en effet :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + x} = 0$$

(b) La courbe $\mathcal{C}$ admet deux tangentes horizontales aux points $(1-\sqrt{2}; \dfrac{1+\sqrt{2}}{2})$ et $(1+\sqrt{2}; \dfrac{1-\sqrt{2}}{2})$.

(c) La tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}$ en $x = 0$ a pour équation :

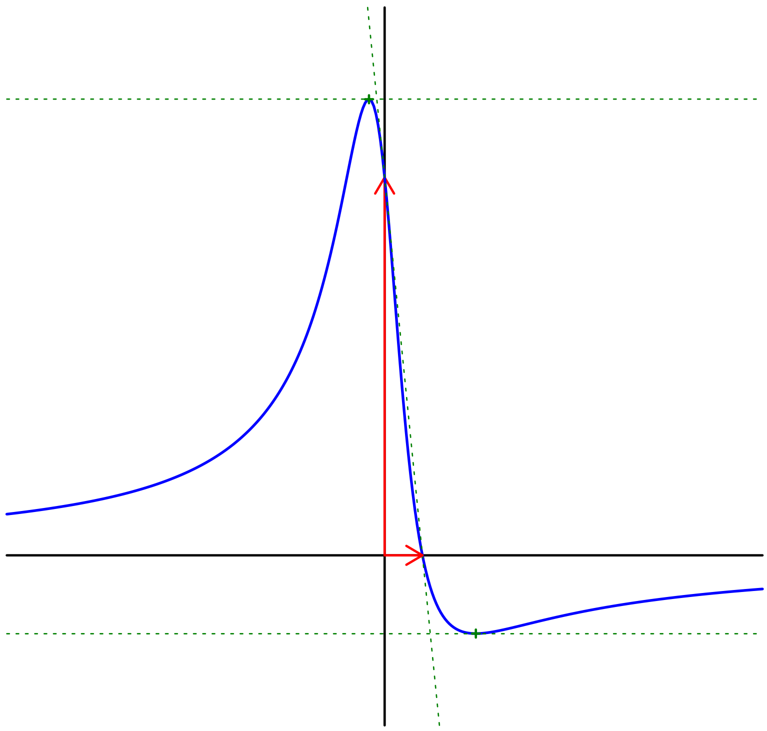
$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1$$

(d) Pour déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T_0, on étudie le signe de la quantité :

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{1+x^2} - \frac{(1-x)(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x^2(x-1)}{1+x^2}$$

Pour $x < 1$ on a $f(x) - (-x+1) < 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de la droite T_0, pour $x > 1$ on a $f(x) - (-x+1) > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite T_0.

(e) La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est la suivante :



Exercice 3

1. On a $f'(x) = [f(x)]^2 \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. De plus $f(0) = 1$ donc $f(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$ donc la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. La fonction f est définie, dérivable et ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et :
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{[f(x)]^2}{[f(x)]^2} = -1$$
On en déduit qu'il existe un réel k tel que $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = -x + k$ et comme $f(0) = 1$ on a $k = 1$ d'où $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = -x + 1$ pour $x \geqslant 0$.
4. On constate que la fonction $\dfrac{1}{f}$ s'annule en $x = 1$ ce qui est une contradiction donc l'équation différentielle $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$ n'admet pas de solution f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ avec la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 4

1. On a :
$$i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i - (4+i)(-1) + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$$
2. On a :
$$(z-i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - biz - ci = az^3 + (b - ai)z^2 + (c - bi)z - ci$$
d'où par identification $a = 1$, $b = -4$ et $c = 13$.
3. On a montré que :
$$z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i = (z-i)(z^2 - 4z + 13)$$
on en déduit les solutions de l'équation (E) à savoir $x_0 = i$, $x_1 = 2 - 3i$ et $x_2 = 2 + 3i$.